UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

La introducción de coordenadas en un plano proyectivo

Autor/es

MIRIAM ALONSO SANTAMARÍA

Director/es

JESÚS ANTONIO LALIENA CLEMENTE

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2016-17

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

La introducción de coordenadas en un plano proyectivo

Alumno:

Miriam Alonso Santamaria

Tutores:

Jesús Laliena

Logroño, Junio, 2017

Índice

Resumen

En este trabajo trataremos la Geometría Proyectiva desde un punto de vista axiomático.

Seremos capaces, bajo ciertas condiciones, de introducir coordenadas sobre un anillo de división en un plano proyectivo definido de forma axiomática. Para ello, nuestro plano proyectivo deberá satisfacer el Axioma de Desargues. Analizaremos que si además el plano proyectivo satisface otros axiomas, como el de Pappus o el de Fano, el anillo de división ha de cumplir ciertas propiedades.

Veremos que con condiciones algo más débiles que el Axioma de Desargues, nos aparecen anillos de coordenadas no asociativos como por ejemplo los octoniones, de gran importancia hoy en día en el campo de la Física.

Abstract.

In this paper we will analyze the Projective Geometry from an axiomatic point of view.

Under certain conditions, we will be able to introduce coordinates over a division ring in a projective plane with adequate properties. For this, our projective plane needs to satisfy the Desargues′s Axiom. We will analyze the fact that if the plane satisfies other axioms, like Pappus′s or Fano′s, the ring has to meet some properties.

We will see that with some less restrictive conditions than Desargues′s Axiom, non associative rings appear, like ostonions, with such a great value in fields like Physics.

1. Introducción

La Geometría Proyectiva tuvo su principal época de desarrollo en el siglo XIX y a principios del siglo XX, aunque algunos de sus resultados ya eran conocidos desde mucho antes.

Aproximadamente entre los años $200-400$ d. de C., Menelao hizo un profundo estudio sobre triángulos esféricos, que fue completado por Ptolomeo, quien también desarrolló el estudio de proyecciones para la construcción de cartas geográficas.

De esta época destacamos a otros dos importantes matemáticos: Diofanto, del que se dice que es el padre del álgebra, y Pappus. De Pappus son famosos varios problemas, en concreto el de "*las tres rectas* ", que consiste en encontrar a partir de tres rectas fijadas el lugar geométrico de un punto que tiene el cuadrado de la distancia a una de ellas igual al producto de la distancia a las otras dos. En el año 200 a. de C., Apolonio ya había estudiado este problema, pero fue Pappus quien probó que el lugar geométrico es una cónica. El estudio de las cónicas está fuertemente ligado al nacimiento de la Geometría Proyectiva.

La Geometría Proyectiva reaparece con la mirada propia de los artistas y arquitectos del Renacimiento, quienes en su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de la perspectiva, trabajaron sobre conceptos geométricos como secciones y proyecciones. Destacaremos en este campo los estudios de Piero Della Francesca $(1410-1492)$, Leone Battista Alberti $(1404-1472)$, Leonardo Da Vinci $(1452-1519)$ y Alberto Durero $(1471-1528)$. El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva, ya estudiados por Leonardo Da Vinci, por ejemplo.

La mirada científica viene de la mano de Galileo $(1564-1642)$, que analizó curvas de diversos tipos como las cónicas, las cicloides, ... Es conocido junto a sus grandes aportaciones el error de considerar que la catenaria era una parábola. Por otro lado, Kepler $(1571-1630)$, introdujo la idea del principio de continuidad unificado, que permitió definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos. El matemático francés Gérard Desargues $(1591-1661)$, arquitecto e ingeniero militar de Lyon, trabajó con este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración generaron un avance significativo no conocido desde la época de Apolonio. Influenciados por él, estos estudios fueron continuados por Blaise Pascal (1623-1662) y Philippe de Hire (1649-1718). Blaise Pascal publicó a los 16 años su "*Ensayo para las cónicas*" donde desarrolla el hexagrama místico, hoy conocido como Teorema de Pascal.

El avance en el estudio de la Geometría Proyectiva continuó con Carnot $(1785-1823)$, Poncelet $(1778-1867)$, Chasles $(1793-1880)$ en Francia; y se extendió rápidamente a otros países europeos con Moebius $(1790-1868)$, Steiner $(1790-1863)$, Staudt $(1798-1867)$ y Cayley $(1821-1895)$. En este tiempo aparecieron también las geometrías no euclídeas de la mano de Karl F.Gauss $(1777-1855)$, Janos Bolyai $(1802-1860)$ y Lobachevski $(1793-1856)$, que desarrollaron una geometría donde por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a la misma. La idea de clasificar las propiedades geométricas según sus clases de transformaciones fue propuesta por Felix Klein $(1849-192)$. Ya Galois $(1811-52)$ había entrevisto el concepto de grupo como algo importante en los desarrollos algebraicos, pero la idea de englobar las distintas geometrías usando esta noción fue desarrollada por Felix Klein en su "*Programa de Erlangen*". Para captar la esencia del Programa de Erlangen, pensemos en un proyector de imágenes que puesto en una determinada posición, permite captar una imagen ampliada de la figura original. Si movemos la pantalla, obtendremos deformaciones, pero como siempre transforma rectas en rectas, tendrá invariantes proyectivos (es decir, las transformaciones son colineaciones, que conservan las razones dobles).

Los distintos tipos de Geometrías vendrían así asociados a ciertos grupos de aplicaciones: la Geometría Afín a las afinidades, la Euclídea a los movimientos, la Topología a los homeomorfismos y la Geometría Proyectiva a las proyectividades.

Conocemos dos formas de tratar la Geometría, desde un punto de vista analítico o de un modo sintético (axiomático). En este trabajo empezaremos tratando la Geometría Proyectiva de un modo sintético. Pero veremos que bajo ciertas condiciones, podremos introducir coordenadas sobre un anillo de división. Por ejemplo, en un plano proyectivo que satisfaga el Axioma de Desargues. En el desarrollo del trabajo estudiaremos otros axiomas que un plano proyectivo puede verificar, y las repercusiones que tiene sobre el anillo de división de coordenadas cuando el plano es desarguesiano. Con condiciones algo más débiles que las del Axioma de Desargues, surgen los anillos de coordenadas de división no asociativos. Concluiremos con un ejemplo muy importante de anillo no asociativo: los octoniones.

Veamos con más detalle el contenido de los distintos apartados de este trabajo. La sección 2 la hemos dedicado a recordar algunos conceptos de álgebra que usaremos a lo largo del trabajo. En la sección 3, comenzamos propiamente la memoria con la definición axiomática de planos proyectivos y afines. Veremos la forma de completar planos afines para obtener a partir de ellos planos proyectivos. Acabaremos la sección con algunos ejemplos. En la sección 4 veremos nuestro primer resultado de gran interés: el Teorema de Desargues; además introduciremos "El Principio de Dualidad" (con el objetivo de reducir a la mitad los resultados a probar). En la sección 5 definiremos dos tipos de aplicaciones fundamentales en Geometría Proyectiva: las perspectividades y las proyectividades. Estas aplicaciones nos darán pie a la introducción de dos nuevos Axiomas: $P6$ y $P7$. En la sección 6 introduciremos los planos proyectivos sobre un anillo de división y estudiaremos algunas de sus características y propiedades. En 7, estudiaremos los Axiomas menor y mayor de Desargues en un plano afín, y de esta forma, seremos capaces de probar que todo plano proyectivo que verifique el Axioma de Desargues, es un plano proyectivo sobre un anillo de división. En la sección 8, veremos que los planos afines que solo satisfagan el Axioma menor de Desargues también pueden ser dotados de coordenadas. En este caso, el anillo de coordenadas ya no es necesariamente asociativo. La memoria finaliza en esta sección dando a conocer un ejemplo de anillo no asociativo: los octoniones.

Parte de la introducción, y la mayor parte de la memoria están basadas en el libro "*Projective Geometry and Modern Algebra*" de Lars Kadison y Matthias T. Kromann (ver [1]). Los comentarios del final de la sección 8 sobre los octoniones están obtenidos de los artículos de Jonh Baez y Jonh Huerta (ver [2] y [4]) y de A. Elduque (ver [3]).

En el desarrollo de este trabajo hemos omitido algunas demostraciones por diversos motivos: algunas resultan bastantes sencillas y podrían haber sido planteadas como ejercicios; otras demostraciones, o partes de ellas, son similares a anteriores ya desarrolladas; y finalmente otras las hemos omitido por motivos de espacio.

2. Algunas nociones previas

A lo largo de este trabajo necesitaremos usar ciertos conceptos y resultados básicos de estructuras algebraicas. Esta sección la dedicaremos a recordar algunos de ellos.

Las nociones de grupo, grupo abeliano y subgrupo las supondremos conocidas.

Definición 2.1. *Sea G un grupo. Se dice que un subgrupo de G, N, es* normal *si*

$$xNx^{-1} \subseteq N, \text{ para todo } x \in G,$$

es decir, para todo $x \in G$ y para cualquier $y \in N$, $xyx^{-1} \in N$.

Definición 2.2. *Sean G_1 y G_2 dos grupos. Diremos que una aplicación $\phi : G_1 \to G_2$ es un* homomorfismo *de grupos si cumple que:*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \text{ para cada } a, b \in G_1.$$

Si además se cumple que el homomorfismo es una correspondencia biyectiva de los elementos de G_1 con los de G_2, entonces lo llamaremos isomorfismo.

Definición 2.3. *Supongamos que G es un subgrupo de las permutaciones de un grupo S ($Perm(S)$). Entonces definimos la* órbita de un punto x de S *como el siguiente conjunto de puntos:*

$$\beta_x = \{g(x) | g \in G\}.$$

Definición 2.4. *Sea un grupo $G \subseteq Perm(S)$. Diremos que el conjunto S es* transitivo *si la órbita de algún elemento de S es todo S.*

Definición 2.5. *Diremos que un grupo G es el* producto semidirecto *de dos subgrupos H, K, y escribiremos $G = H \rtimes K$, si*

- *$SD1$. H es un subgrupo normal de G.*
- *$SD2$. $H \cap K = \{1\}$.*
- *$SD3$. H y K generan juntos G.*

Las nociones de anillo, anillo de división y cuerpo las supondremos también conocidas.

Definición 2.6. *Sea R un anillo de división. La* característica *de R, denotada por $char(R)$, es el menor entero ≥ 2 tal que:*

$$1 + \cdots + 1 = 0 \text{ (p-veces)},$$

siendo 1 el elemento unitario de R.
Si dicho número entero no existe, entonces diremos que R es de característica 0.

Proposición 2.7. *La característica de un anillo de división R siempre será 0 o un número primo, p.*

Definición 2.8. *Sea R un anillo de división. Definiremos el* centro de R, *denotado por $Z(R)$, como el conjunto de los $a \in R$ tal que $ab = ba$ para cada $b \in R$.*

Proposición 2.9. *El centro, $Z(R)$, de un anillo de división R es un cuerpo.*

Definición 2.10. *Un* automorfismo *en un anillo de división R es una aplicación biyectiva $\sigma : R \to R$ tal que para cada $a, b \in R$ se cumple que:*

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$$
$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Además se tiene que $\sigma(0) = 0$ *y* $\sigma(1) = 1$. *Al conjunto de todos los automorfismos lo denotaremos* $Aut(R)$.

Proposición 2.11. *Sea* R *un anillo de división, entonces* $Aut(R)$ *forma un grupo bajo la composición.*

3. Planos afines y proyectivos

En este primer apartado, nos centraremos en definir de modo axiomático los planos afines y proyectivos; y veremos cómo construir planos proyectivos a partir de planos afines. En concreto, probaremos que al completar un plano afín con "puntos del infinito" y una "recta del infinito" se tiene un plano proyectivo. Por último, desarrollaremos algunos ejemplos de planos proyectivos, como el plano proyectivo de siete puntos y el plano proyectivo real.

Definición 3.1. *Un* plano afín *es un conjunto no vacío formado por unos elementos a los que llamamos* puntos *y por un conjunto de subconjuntos llamados* rectas*, que satisfacen los siguientes tres axiomas:*

- *A*1*: Sean P y Q dos puntos distintos, entonces existe una única recta que contiene a ambos puntos, y que denotamos por PQ.*
- *A*2*: Sea l una recta y P un punto tal que $P \notin l$, entonces existe una única recta m que no tiene ningún punto en común con l y tal que $P \in m$.*
- *A*3*: Existen tres puntos distintos no colineales.*

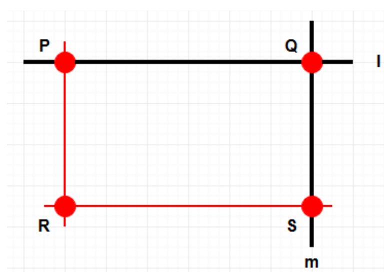
Decimos que dos rectas l y m son *paralelas* si $l = m$ ó si $l \cap m = \emptyset$. Lo denotamos por $l \parallel m$. Se puede probar que la relación de paralelismo es una relación de equivalencia entre las rectas usando $A2$.

Proposición 3.2. *Un plano afín debe estar formado al menos por cuatro puntos.*

Demostración: Por el axioma $A3$, sabemos que existen 3 puntos P, S, R no colineales. Entonces por el axioma $A2$, existe una recta l, paralela a SR tal que $P \in l$. Del mismo modo existe una recta m, paralela a PR y que pasa por S.

Observemos que $l \nparallel m$, ya que en otro caso llegaríamos a que $SR \parallel l \parallel m \parallel PR$, y por tanto $SR \parallel PR$, lo que es imposible porque R está en ambas rectas.

Entonces m y l se intersecan en un punto Q. De esta forma $Q \in m$ que es paralela y distinta a PR y por tanto $Q \neq P, R$. Usando el mismo argumento pero con l obtenemos que $Q \neq S$. Luego para que se cumplan los tres axiomas en necesario que el plano afín contenga al menos cuatro puntos.

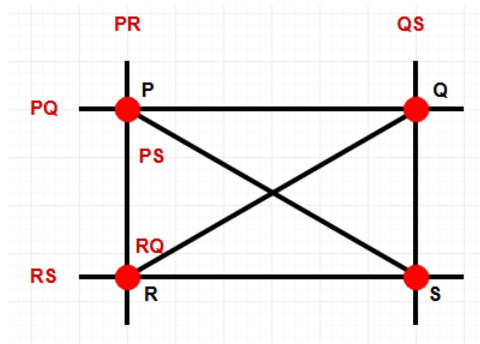


□

Ejemplo 3.3. *El plano ordinario conocido de la Geometría Euclídea satisface los Axiomas $A1 - A3$, por lo tanto, es un plano afín, el plano afín real $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.*

Ejemplo 3.4. Veamos un ejemplo de plano afín de cuatro puntos:

Sean $\{P, Q, R, S\}$ el conjunto de puntos y $\{ \{P, Q\}, \{P, R\}, \{P, S\}, \{R, Q\}, \{Q, S\}, \{R, S\} \}$ el de rectas.



Definición 3.5. *Un* haz de rectas *es el conjunto de todas las rectas que contienen un punto, P, o el conjunto de todas las rectas paralelas a una recta l.*

Nuestro objetivo ahora será completar un plano afín mediante ciertos puntos que llamaremos del infinito y de esta forma llegar a la noción de plano proyectivo.

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín y l una recta de $\mathbb{A}$, denotaremos por $[l]$ al conjunto de rectas de $\mathbb{A}$ que son paralelas a l. Para cada conjunto $[l]$ añadiremos un 'punto del infinito' en la dirección de l que denotaremos por $P_{[l]}$, y que supondremos que esta en todas las rectas de $[l]$.

Definición 3.6. *Sea $\mathbb{A}$ un plano afín. Definimos $\mathbb{S}$, que llamaremos* la compleción de $\mathbb{A}$, *como el conjunto formado por todos los puntos de $\mathbb{A}$ más todos los puntos del infinito, y donde las rectas son las rectas de $\mathbb{A}$ a las que se añade el punto del infinito correspondiente a cada recta y la recta del infinito, formada por todos los puntos del infinito.*

Definición 3.7. *Un* plano proyectivo *es un conjunto no vacío formado por unos elementos a los que llamamos* puntos *y por un conjunto de subconjuntos llamados* rectas *que satisfacen los siguientes cuatro axiomas:*

- *$P1$: Sean P y Q dos puntos distintos, entonces existe una única recta que contiene a ambos puntos.*
- *$P2$: Dos rectas distintas se intersecan en un único punto.*
- *$P3$: Existen tres puntos distintos no colineales.*
- *$P4$: Toda recta contiene al menos tres puntos.*

Proposición 3.8. *La compleción $\mathbb{S}$ de un plano afín $\mathbb{A}$, es un plano proyectivo.*

Demostración: Para ello comprobaremos que $\mathbb{S}$ verifica los cuatro axiomas:

$P1$:

a) Si P y Q son dos puntos de $\mathbb{A}$, entonces no se encuentran en la recta del infinito, además por $A1$, pertenecen a una única recta de $\mathbb{A}$ y por tanto también a una de $\mathbb{S}$ (que es la misma con el punto añadido del infinito).

b) Si Q es un punto de $\mathbb{A}$ y $P = P_{[l]}$ un punto del infinito, entonces por $A2$ podemos encontrar una recta m tal que $Q \in m$ y $m \parallel l$, con lo que $m \in [l]$. Luego $P_{[l]}$ pertenece a la extensión de m en $\mathbb{S}$. De esta forma queda claro que existe una única recta que contenga a ambos.

c) Si P y Q son puntos distintos del infinito ambos, entonces la recta del infinito es la única recta de $\mathbb{S}$ que los contiene.

$P2$:

a) Supongamos que l y m son dos rectas de $\mathbb{A}$. Si $l \nparallel m$, entonces se intersecan en un único punto de $\mathbb{A}$. Si $l \parallel m$, entonces l y m se intersecan en el punto del infinito $P_{[l]}$.

b) Supongamos ahora que l es una recta de $\mathbb{A}$ y que $m = l_\infty$ (la recta del infinito), entonces en este caso se intersecan en el punto del infinito $P_{[l]}$.

$P3$:

Es inmediato por el axioma $A3$.

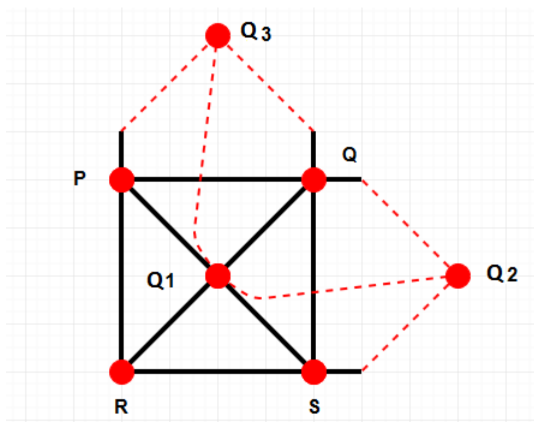
$P4$:

Es fácil probar que cada recta de $\mathbb{A}$ contiene al menos dos puntos. Pero en $\mathbb{S}$ cada recta tiene al menos un punto del infinito, por tanto cada recta de $\mathbb{S}$ tiene al menos tres puntos. □

Ejemplo 3.9. *Completando el plano afín real de la Geometría Euclídea, obtenemos el plano proyectivo real, $P^2(\mathbb{R})$. Como las rectas paralelas en el plano afín real tienen la misma pendiente, nosotros identificaremos los puntos del infinito por una coordenada de pendiente m, donde $-\infty < m \leq \infty$. Por ejemplo, las rectas verticales son paralelas al eje y, luego se intersecarán en $P^2(\mathbb{R})$ en el punto $m = \infty$.*

Ejemplo 3.10. Veamos que si completamos el plano afín de cuatro puntos, usando la Proposición 3.8. y $A2$ obtenemos un plano proyectivo de siete puntos.

Completemos mediante los axiomas de plano proyectivo el plano afín de cuatro puntos visto en el Ejemplo 3.4.. Teníamos tres pares de rectas que no se intersecaban en ningún punto entre ellas. Entonces por el axioma $P2$ añadimos los puntos $Q1 = P_{[PS]} = P_{[QR]}$, $Q2 = P_{[PQ]} = P_{[RS]}$ y $Q3 = P_{[PR]} = P_{[QS]}$. Finalmente añadimos la recta del infinito que contiene a $Q1$, $Q2$ y $Q3$.



Ejemplo 3.11. *Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio 3-dimensional Euclídeo y sea O un punto de $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de rectas que pasan por O. Entonces definimos una recta de $\mathbb{S}$ como el conjunto de rectas que pasan por O y que además viven en un mismo plano η de $\mathbb{R}^3$ prefijado tal que $O \in \eta$. Para cada plano tenemos una recta distinta. Con esta definición, $\mathbb{S}$ satisface los axiomas $P1 - P4$, y por tanto, es un plano proyectivo.*

Respecto a este ejemplo es interesante definir sus **coordenadas homogéneas**. Habíamos definido un punto P de $\mathbb{S}$ como una recta p que atraviesa el origen O. Entonces nosotros representaremos P eligiendo un punto $(x_1, x_2, x_3) \in p$ distinto al $(0, 0, 0)$. De esta forma, los números x_1, x_2, x_3 son las **coordenadas homogéneas** de P. Cualquier otro punto de p tendrá las coordenadas $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Luego el conjunto de puntos de $\mathbb{S}$ es el conjunto de 3-tuplas (x_1, x_2, x_3) de números reales $(\neq (0,0,0))$, donde dos de ellas, (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3), representan al mismo punto si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x'_i = \lambda x_i$ con $i \in \{1,2,3\}$. Además, como la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a O es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (con $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$) entonces $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ será la ecuación que satisfacen las coordenadas homogéneas de los puntos de $\mathbb{S}$.

Definición 3.12. *Dos planos proyectivos $\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}'$ son* isomorfos *si existe una correspondencia biyectiva, $T : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}'$, tal que envía puntos colineales a puntos colineales. Si $\mathbb{S} = \mathbb{S}'$, diremos que T es un automorfismo.*

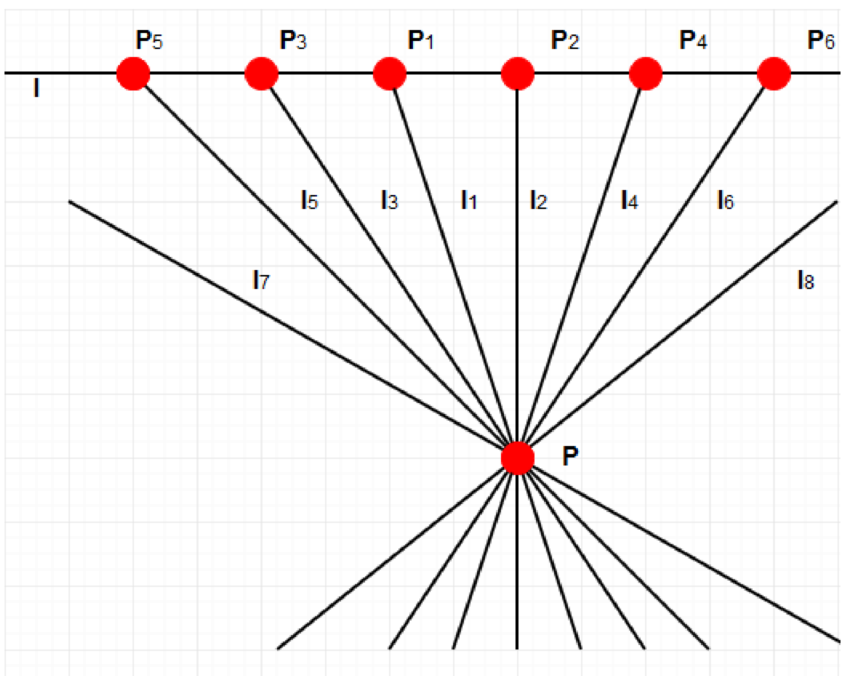
Proposición 3.13. *El plano proyectivo $\mathbb{S}$ definido por coordenadas homogéneas de números reales es isomorfo al plano proyectivo obtenido al completar el plano afín de la Geometría Euclídea.*

Observación 3.14. *Un plano proyectivo con $n+1$ puntos exactamente en una recta, tiene un total de $n^2 + 2n + 1$ puntos.*

En efecto, sea l la recta de $n+1$ puntos. Por el axioma $P3$ sabemos que existe tres puntos no colineales. Por tanto existe un punto, P, del plano proyectivo tal que $P \notin l$. Así podemos construir $n+1$ rectas, $l_1, \cdots, l_{n+1}$, de modo que para cada l_i, P y $P_i \in l_i$ con $i \in \{1, \cdots, n+1\}$.
Se puede probar que todas las rectas tienen el mismo número de puntos y así:

$$(n+1)\textit{rectas}\cdot(n)\textit{puntos distintos} = n^2 + n.$$

Sumando ahora el punto P, que es el que nos falta, obtenemos $n^2 + n + 1$ puntos.



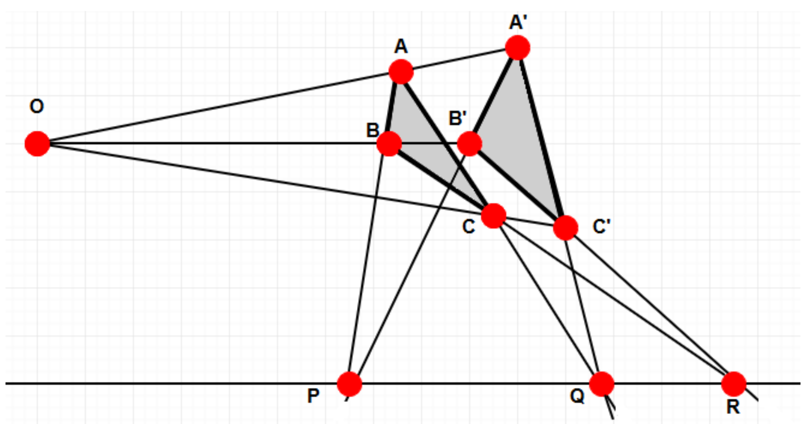
4. El axioma de Desargues

El primer resultado que nos interesará estudiar en Geometría Proyectiva es el Teorema de Desargues sobre triángulos en perspectiva. Otro concepto muy interesante, que nos permite reducir a la mitad los resultados a probar, es "*El Principio de Dualidad*", que veremos en la parte final de la sección.

4.1. Teorema de Desargues

Observemos que por el Axioma $P3$, sabemos de la existencia de triángulos.

- **P5 (Axioma de Desargues):** Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tal que las tres rectas que pasan por los respectivos vértices AA', BB' y CC' se intersecan en un único punto O (se dice que los dos triángulos están en perspectiva respecto a O). Entonces los tres pares de lados se intersecan en tres puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap B'C'$, que pertenecen a la misma recta (se dice que los dos triángulos están en perspectiva respecto de una recta).

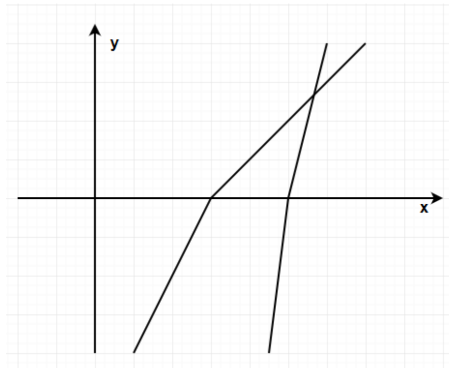


Teorema 4.1. ***Teorema de Desargues:*** *En el plano proyectivo real, dos triángulos en perspectiva respecto de un punto, también lo están respecto a una recta.*

Ejemplo 4.2. Ejemplo de Moulton

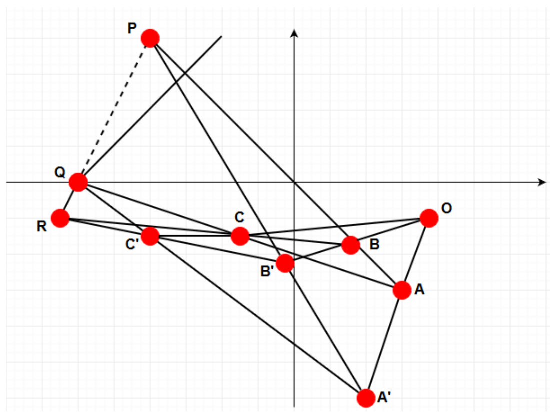
Definimos en $\mathbb{R}^2$ *el plano afín de Moulton,* $\mathbb{A}'$*. Los puntos, las rectas verticales y rectas de pendiente negativa son iguales a las definidas sobre el plano afín euclídeo. Sin embargo, las rectas de pendientes positivas son distintas en* $\mathbb{A}'$*. Analíticamente, para* $x_0 \in \mathbb{R}$*, las rectas de pendientes positivas de Moulton vienen dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} m(x - x_0), x \leq x_0 \\ \frac{m}{2}(x - x_0), x > x_0 \end{cases}$$



Se puede probar que esta configuración, $\mathbb{A}'$, es un plano afín.

Completamos el plano afín $\mathbb{A}'$ obteniendo el plano proyectivo $\mathbb{P}'$. Realizando una configuración de Desargues en la que todos los puntos excepto P se encuentren bajo el eje de abscisas x y tal que QR tenga pendiente positiva, tenemos que el Teorema de Desargues no se verifica en $\mathbb{P}'$, ya que $P \notin QR$.



Definición 4.3. *Un* espacio proyectivo 3-dimensional *es un conjunto no vacío tal que sus elementos se llaman* puntos, *junto con unos ciertos subconjuntos llamados* rectas *y otros subconjuntos llamados* planos, *que satisfacen los siguientes axiomas:*

- *$S1$: Dos puntos distintos P y Q pertenecen a una y solo a una recta.*
- *$S2$: Tres puntos no colineales P, Q y R pertenecen a un único plano.*
- *$S3$: Una recta y un plano se intersecan en al menos un punto.*
- *$S4$: Dos planos tiene al menos una recta en común.*
- *$S5$: Existen cuatro puntos no coplanarios, donde cualesquiera tres de ellos no son colineales.*
- *$S6$: Toda recta tiene al menos tres puntos.*

Observación 4.4. *Sea $\mathbb{T}$ un espacio proyectivo 3-dimensional. Usando los axiomas $S1-S6$ vamos a probar que se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Si dos puntos distintos P, Q, viven en un plano Σ, entonces la recta que une P, Q está contenida en Σ:*
  Sea $l = PQ$, por $S1$ sabemos que l es la única recta que contiene a P y a Q. Por $S5$ se tiene que existe $R \notin \Sigma$ tal que P, Q, R determinan por $S2$ un plano Σ'. Ahora por $S4$, $\Sigma \cap \Sigma'$ es una recta que tendrá que ser l y $l \subseteq \Sigma$.

- *Un plano, Σ y una recta, l, tal que $l \nsubseteq \Sigma$, se intersecan únicamente en un punto:*
  Por $S3$ sabemos que un plano y una recta se intersecan en al menos un punto. Y por la primera afirmación, sabemos que si una recta y un plano se intersecan en dos puntos, entonces la recta está incluida en el plano. Por tanto, $l \cap \Sigma$ solo podrá ser un punto.

- *Dos planos distintos, π, π', se intersecan en una única recta:*
  Por $S4$ sabemos que π y π' se intersecan en al menos una recta. Supongamos que $\{l, P\} \subseteq \pi \cap \pi'$, con l una recta y P un punto tal que $P \notin l$. De esta forma, encontramos tres puntos no colineales. Por $S2$, tenemos que tres puntos no colineales pertenecen a un único plano. Luego $\pi = \pi'$, que no es cierto. Por tanto, dos planos distintos se intersecan en una única recta.

- *Una recta, l, y un punto, P, que no esta en ella, pertenecen a un único plano:*
  Por $S6$, l tiene al menos tres puntos. Tomando dos de ellos y P obtenemos tres puntos no colineales. Entonces por $S2$, existe un único plano que contenga a l y a P a la vez.

A continuación introduciremos un teorema que necesitaremos más adelante.

Teorema 4.5. *El Axioma de Desargues se cumple en cualquier espacio proyectivo 3-dimensional, donde no es necesario asumir que todos los puntos pertenecen a un plano. En particular, el Axioma de Desargues se cumplirá en cualquier plano que pertenezca a un espacio proyectivo 3-dimensional.*

4.2. Principio de dualidad

Uno de los aspectos más importantes de la geometría proyectiva en dimensión mayor que uno es el Principio de Dualidad. Este principio afirma que los teoremas vienen a pares duales: por ejemplo, en dimensión 2, basta intercambiar las palabras recta y punto, y cambiar la intersección de dos rectas por la recta que une dos puntos y viceversa. De esta forma al probar un teorema, su dual queda también probado.

Definición 4.6. *Definimos* π^* plano proyectivo dual de π *como el conjunto de todas las rectas de π, y donde una recta en π^* es un haz de rectas de π.*

Proposición 4.7. *Sea π un plano proyectivo. Entonces π^* también es un plano proyectivo. Además si en π se cumple el axioma $P5$, también se cumple en π^*.*

Demostración: Veamos que π^* verifica los axiomas $P1 - P4$. Veremos que estos axiomas se trasladan a sus duales $D1 - D4$ respectivamente, que son simples consecuencias de $P1 - P4$. Por último veamos que $P5$ implica $D5$.

- $P1$: Si p, q son dos puntos distintos de π^*, entonces existe una única recta de π^* que contiene a p y a q.
  Si trasladamos esta afirmación a π, diría:
  $D1$: Si p, q son dos distintas rectas de π,entonces existe un único haz de rectas que contiene a p y q. Es decir, existe un único punto en común. Luego $D1$ es equivalente a $P2$.

- $P2$: Si L y M son dos distintas rectas en π^*, entonces existe un solo punto en común.
  En π:
  $D2$: Dos haces de rectas distintos tienen exactamente una recta en común. Es equivalente a $P1$.

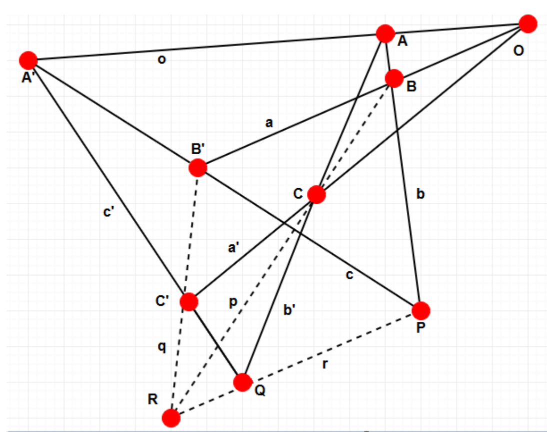
- $P3$: Existen tres puntos no colineales en π^*.
  En π:
  $D3$: Existen tres rectas no concurrentes en π. Por $P3$ existen tres puntos no colineales, A, B, C. Entonces las rectas AB, AC, BC no serán concurrentes.

- $P4$: Toda recta en π^* tiene al menos tres puntos.
  En π:
  $D4$: Todo haz en π, tiene al menos tres rectas. Sea un haz de rectas centrado en el punto P y sea l una recta que no pasa por P, la cual existe por $P3$ y $P1$. Por $P4$ sabemos que l tiene al menos tres puntos, A, B, C. Por tanto, las rectas AP, BP, CP pertenecerán al haz que pasa por P. Asumiendo $P4$ se prueba también $D4$.

Ahora supongamos que el axioma $P5$ se cumple en π. Veamos qué ocurre en π^*:

- P5: Sean o, a, b, c, a', b', c' siete puntos distintos de π^*, tal que oaa', obb', occ' son colineales y abc, $a'b'c'$ son triángulos. Entonces los puntos $p = ab \cap a'b'$, $q = ac \cap a'c'$ y $r = bc \cap b'c'$ son colineales.
  En π:
  $D5$: Sean o, a, b, c, a', b', c' siete rectas distintas de π, tal que o, a, a'; o, b, b'; o, c, c' son concurrentes y abc, $a'b'c'$ forman dos triángulos. Entonces las rectas $p = (a \cap b) \cup (a' \cap b')$, $q = (a \cap c) \cup (a' \cap c')$ y $r = (b \cap c) \cup (b' \cap c')$ son concurrentes.

  Para probar esta afirmación, dibujaremos en el siguiente gráfico, los puntos y rectas de tal forma que se pueda aplicar $P5$. Dados $O = o \cap a \cap a'$, $A = o \cap b \cap b'$, $A' = o \cap c \cap c'$, $B = a \cap b$, $B' = a \cap c$, $C = a' \cap b'$ y $C' = a' \cap c'$. Entonces O, A, B, C, A', B', C' satisfacen las hipótesis de $P5$, luego $P = AB \cap A'B' = b \cap c$, $Q = AC \cap A'C' = b' \cap c'$, y $R = BC \cap B'C' = p \cap q$ son colineales. Pero como $PQ = r$, entonces p, q, r son concurrentes en R.



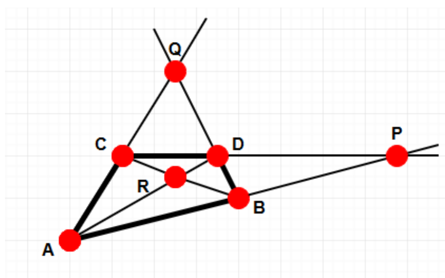
$\square$

5. El Axioma de Fano y el Axioma $P7$

Nos centraremos en conocer dos tipos de aplicaciones fundamentales en Geometría Proyectiva: las perspectividades y las proyectividades. Para ello será necesario definir algunos conceptos previos como el de cuadrilátero completo, cuaterna armónica o razón doble de cuatro puntos. Además presentaremos los axiomas $P6$, también llamado Axioma de Fano, y $P7$, también llamado "Teorema Fundamental de proyectividades entre rectas". El Axioma $P7$ es equivalente al Teorema de Pappus, que también estudiaremos, e implica el Teorema de Desargues.

5.1. Axioma de Fano $P6$

Definición 5.1. *Supongamos que A, B, C y D son 4 puntos en un plano proyectivo tal que tres puntos de ellos no son colineales. Entonces la* compleción del cuadrilátero *$ABCD$ es la colección de siete puntos y seis rectas determinadas por los cuatro vértices y por los puntos de intersección entre lados opuestos $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$ y $R = AD \cap BC$. Los puntos P, Q y R se llaman* puntos de la diagonal *de la compleción del cuadrilátero.*

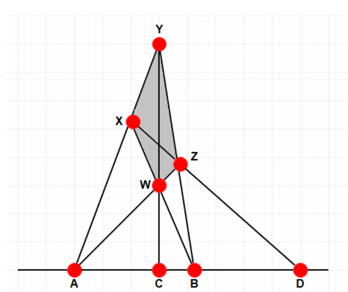


- **Axioma de Fano $P6$:** Los puntos de la diagonal de la compleción de un cuadrilátero son no colineales.

Proposición 5.2. *El plano proyectivo real satisface el Axioma $P6$.*

5.2. Puntos armónicos

Definición 5.3. *Una cuaterna ordenada de distintos puntos A, B, C y D en una recta se llama* cuaterna armónica *si hay una compleción de un cuadrilátero $XYZW$ tal que A y B son dos puntos de la diagonal de la compleción del cuadrilátero ($A = XY \cap ZW$ y $B = XW \cap YZ$) y C, D pertenecen a los dos restantes lados del cuadrilátero ($C \in YW$ y $D \in XZ$).*
Escribiremos $H(A, B; C, D)$ si A, B, C, D forman una cuaterna armónica.



Observemos que si A, B, C, D es una cuaterna armónica, entonces el hecho de que A, B, C, D sean distintos implica que los puntos de la diagonal definidos por el cuadrilátero $XYZW$ no son colineales. De hecho, la noción de cuatro puntos armónicos no tiene mucho sentido sin que se satisfaga el Axioma de Fano $P6$. Por lo tanto, asumiremos que se satisface el Axioma $P6$ cuando se hable de puntos armónicos.

Notemos que $H(A, B; C, D)$ implica que $H(A, B; D, C)$, $H(B, A; C, D)$ y $H(B, A; D, C)$.

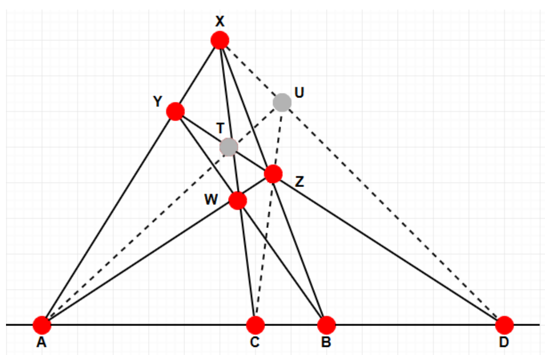
Proposición 5.4. *Sea A, B, C tres puntos distintos de una recta. Entonces (asumiendo $P6$) existe un punto D tal que $H(A, B; C, D)$. Además, si asumimos que se satisface el Axioma $P5$, este punto es único.*

Proposición 5.5. *Sea AB, CD cuatro puntos armónicos. Entonces (asumiendo $P5$) CD, AB son cuatro puntos armónicos. De esta forma:*

$$\begin{array}{l} H(A,B;C,D) \Leftrightarrow H(B,A;C,D) \Leftrightarrow H(A,B;D,C) \Leftrightarrow H(B,A;D,C) \\ \quad\Updownarrow \\ H(C,D;A,B) \Leftrightarrow H(D,C;A,B) \Leftrightarrow H(C,D;B,A) \Leftrightarrow H(D,C;B,A) \end{array}$$

Demostración: Asumamos que $H(A, B; C, D)$ y sea $XYZW$ la complección del cuadrángulo de la definición de cuaterna armónica.

Tracemos las rectas DX y CZ, cuyo punto de intersección es U. Sea $XW \cap YZ = T$.



Veamos que $H(C, D; A, B)$. Tenemos que $TXUZ$ es la complección de un cuadrángulo con C, D los dos puntos de la diagonal y $B \in XZ$. Falta ver que TU pasa por A.

Consideremos los triángulos XUZ y YTW, con sus correspondientes puntos de intersección D, B y C respectivamente, los cuales son colineales. Entonces por $D5$ las rectas que unen los correspondientes vértices, XY, TU, WZ, son concurrentes en A. Por tanto, $A \in TU$. $\square$

Definición 5.6. *En el plano real euclídeo, a cuatro puntos colineales se les puede asignar la razón doble definida como:*

$$R_x(A, B; C, D) = \tfrac{AC}{BC} / \tfrac{AD}{BD}.$$

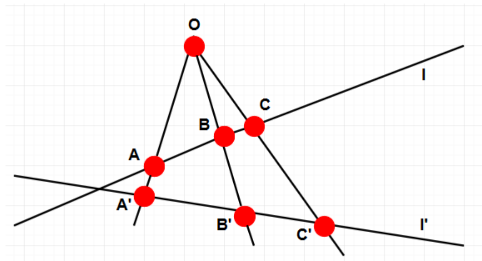
Se puede probar que A, B, C y D forman una cuaterna armónica si y solo si $R_x(A, B; C, D) = -1$.

La razón doble de cuatro rectas concurrentes l, m, n, o en el plano euclídeo viene dada por:

$$R_x(l, m; n, o) = \tfrac{sen\angle ln}{sen\angle lo} / \tfrac{sen\angle mn}{sen\angle mo}.$$

5.3. Perspectividades y proyectividades

Definición 5.7. *Sean l y l' dos rectas en un plano proyectivo y sea O un punto tal que $O \neq l, l'$. Una* perspectividad *de l en l' de centro O es una correspondencia uno a uno de los puntos de l a los de l' tal que para todo $A \in l$, $A \to A' = OA \cap l'$.*



Escribiremos $l \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} l'$ para decir que l se aplica a l' con una perspectividad de centro O.

Se puede probar que la composición de dos o más perspectividades no es necesario que sea una perspectividad. Esto nos induce a presentar la siguiente definición.

Definición 5.8. *Una* proyectividad *es una correspondencia de una recta l a otra l' que puede ser expresada por una composición finita de perspectividades:*

$$l \overset{O_1}{\overline{\overline{\wedge}}} l_1 \overset{O_2}{\overline{\overline{\wedge}}} \cdots \overset{O_{n-1}}{\overline{\overline{\wedge}}} l_n \overset{O_n}{\overline{\overline{\wedge}}} l'.$$

Proposición 5.9. *Sea l una recta. Entonces el conjunto de proyectividades de l en l forman un grupo que denotaremos por $PJ(l)$.*

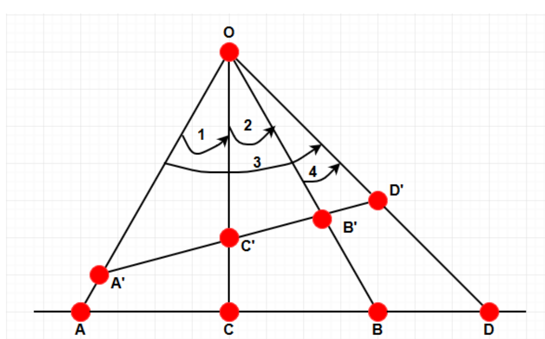
Proposición 5.10. *Sean A, B, C y A', B', C' dos ternas de puntos de una recta l en un plano proyectivo. Entonces hay una proyectividad de l en si misma tal que :*

$$A \to A'$$
$$B \to B'$$
$$C \to C'$$

Lema 5.11. *Supongamos que $ABCD \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} A'BC'D'$ es una perspectividad de l en l', en un plano proyectivo que cumple $P5$ y $P6$, donde $l \cap l' = B$. Entonces si $H(A, B; C, D)$ se cumple que $H(A', B; C'D')$.*

Proposición 5.12. *Asumiendo $P5$ y $P6$ en un plano proyectivo, una proyectividad envía puntos armónicos a puntos armónicos.*

Observación 5.13. *Veamos que la razón doble es invariante bajo una perspectividad central en el plano proyectivo real.*



- *Aplicando las leyes de los senos en un plano Euclídeo, demostremos que*

$$R_x(A,B;C,D) = \frac{sen\angle 1}{sen\angle 2} / \frac{sen\angle 3}{sen\angle 4}.$$

  Usando el Teorema del seno en los triángulos OAC, OBC, OAD y OBD se tiene:

$$\frac{AC}{sen\angle 1} = \frac{OC}{sen\angle A} \Rightarrow AC = sen\angle 1 \frac{OC}{sen\angle A}$$
$$\frac{BC}{sen\angle 2} = \frac{OC}{sen\angle B} \Rightarrow BC = sen\angle 2 \frac{OC}{sen\angle B}$$
$$\frac{AD}{sen\angle 3} = \frac{OD}{sen\angle A} \Rightarrow AD = sen\angle 3 \frac{OD}{sen\angle A}$$
$$\frac{BD}{sen\angle 4} = \frac{OD}{sen\angle B} \Rightarrow BD = sen\angle 4 \frac{OD}{sen\angle B}$$

  Por definición, $R_x(A,B;C,D) = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD}$, entonces sustituyendo AC, BC, AD, BD y simplificando:

$$R_x(A,B;C,D) = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD} = \frac{sen\angle 1}{sen\angle 2} / \frac{sen\angle 3}{sen\angle 4}.$$

- *Probemos ahora que $R_x(A,B;C,D) = R_x(OA,OB;OC,OD) = R_x(A',B';C',D')$.*

  Usando el Teorema del seno de forma similar a antes, se llega a que

$$R_x(A',B';C',D') = \frac{sen\angle 1}{sen\angle 2} / \frac{sen\angle 3}{sen\angle 4}$$

  y por tanto, $R_x(A',B';C',D') = R_x(A,B;C,D)$.

  Por definición de R_x para rectas, tenemos que

$$R_x(OA,OB;OC,OD) = \frac{sen\angle OAOC}{sen\angle OBOC} / \frac{sen\angle OAOD}{sen\angle OBOD} = \frac{sen\angle 1}{sen\angle 2} / \frac{sen\angle 3}{sen\angle 4}.$$

  De esta forma queda probada la segunda igualdad.

- *De aquí se deduce que las proyecciones preservan la razón doble en el plano proyectivo real.*

Observación 5.14. *Supongamos ahora que existen A, B, C, D, y E en una recta de un plano euclídeo tal que $R_x(A,B;C,D) = R_x(A,B;C,E)$, siendo A, B, C, D puntos distintos.*

- *Probemos que $D = E$.*

  Usando la definición,

$$R_x(A,B;C,D) = R_x(A,B;C,E) \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} / \frac{AE}{BE} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD+DE}{BD+DE} \Leftrightarrow$$

$$BDDE - DEAD = 0 \Leftrightarrow DE(BD - AD) = 0 \Leftrightarrow DE = 0 \Leftrightarrow D = E.$$

- *Y establezcamos el dual.*

  Sean l, m, n, o, q cinco rectas concurrentes, siendo l, m, n, o distintas. Si $R_x(l,m;n,o) = R_x(l,m;n,q)$ entonces $o = q$.

  La demostración de este hecho se sigue del punto anterior.

5.4. Teorema fundamental para proyectividades sobre una recta

- $P7$ **(Teorema fundamental para proyectividades de una recta):**
  Sea l una recta en una plano proyectivo y sean A, B, C y A', B', C' dos ternas de puntos distintos sobre l. Entonces hay como mucho una proyectividad de l en l tal que $ABC \barwedge A'B'C'$.

Dado que para dos ternas de dos rectas hay una proyectividad que aplica una terna en la otra, $P7$ se cumple en cualquier recta si se cumple en una dada. Entonces una proyectividad distinta de la identidad deja como máximo dos puntos fijos.

Proposición 5.15. *$P7$ es equivalente a:*

- *$P7'$: Sean l y l' dos rectas distintas de un plano proyectivo. Sean $A, B, C \in l$ y $A', B', C' \in l'$. Entonces hay una y solo una proyectividad de l a l' tal que $ABC \barwedge A'B'C'$.*

- *$P7''$: Sean l y l' dos rectas distintas de un plano proyectivo y $X = l \cap l'$. Entonces toda proyectividad $l \barwedge l'$ que envía X a sí mismo, es una perspectividad.*

Proposición 5.16. *$P7$ implica la siguiente afirmación dual:*

- *$D7$: Sea P un punto de un plano proyectivo. Sean a, b, c y a', b', c' dos ternas de rectas que pasan por P. Entonces existe una única proyectividad tal que $abc \barwedge a'b'c'$.*

Teorema 5.17. Si $P7$ se cumple en un plano proyectivo π, entonces el Axioma $P5$ también se cumple en π.

Teorema 5.18. *El Teorema fundamental ($P7$) se cumple en el plano proyectivo real.*

Demostración: Sea l una recta en el plano proyectivo. Sean A, B, C y A', B', C' dos ternas de tres puntos distintos de l. Supongamos que existen φ_1 y φ_2, con $\varphi_1 \neq \varphi_2$, dos proyectividades de l en l tal que $ABC \barwedge A'B'C'$. Tomemos un punto X en l distinto de A, B, C, y tal que $\varphi_1(X) = X'$ y $\varphi_2(X) = X''$, con $X' \neq X''$. Entonces tenemos que $ABCX \barwedge A'B'C'X'$ y $ABCX \barwedge A'B'C'X''$. Por la Observación 5.13. sabemos que las proyectividades preservan la razón doble en el plano real proyectivo. Luego:

$$R_x(A, B; C, X) = R_x(A', B'; C', X') \text{ y } R_x(A, B; C, X) = R_x(A', B'; C', X'').$$

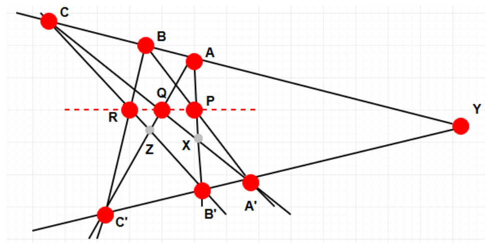
Por tanto, $R_x(A', B'; C', X') = R_x(A', B'; C', X'')$ y por la Observación 5.14. tenemos que:

$$X' = X''.$$

Luego, $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

A continuación presentaremos el teorema de Geometría Proyectiva más antiguo. Establece que si los seis vértices de un hexágono viven alternativamente en dos rectas, entonces los tres pares opuestos de lados se intersecan en puntos alineados.

Teorema 5.19. ***(Teorema de Pappus)***
Sean l y l' dos rectas distintas de un plano proyectivo. Sean A, B, C tres puntos distintos de l y A', B', C' tres puntos distintos de l' tal que $A, B, C, A', B', C' \neq Y = l \cap l'$. Entonces P, Q, R son colineales, donde $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ y $R = BC' \cap B'C$.



Teorema 5.20. *El Teorema fundamental (P7) implica el Teorema de Pappus.*

Demostración: Sean A, B, C, A', B', C', P, Q, R como en el Teorema de Pappus y $X = AB' \cap A'C$, $Z = AC' \cap B'C$. Veamos que P, Q y R son colineales. Para ello, consideremos la siguiente proyectividad:

$$AXB'P \overset{A'}{\overline{\overline{\wedge}}} ACYB \overset{C'}{\overline{\overline{\wedge}}} ZCB'R.$$

Tenemos que B' es un punto fijo de la proyectividad y además es punto de intersección de la primera y de la última recta, luego por $P7''$ la proyectividad descrita es una perspectividad. Su centro puede ser calculado como el punto de intersección $AZ \cap XC = AC' \cap A'C = Q$. Entonces:

$$AXB'P \overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}} ZCB'R.$$

Los últimos puntos en perspectiva nos dicen que P, Q y R pertenecen a la misma recta. $\square$

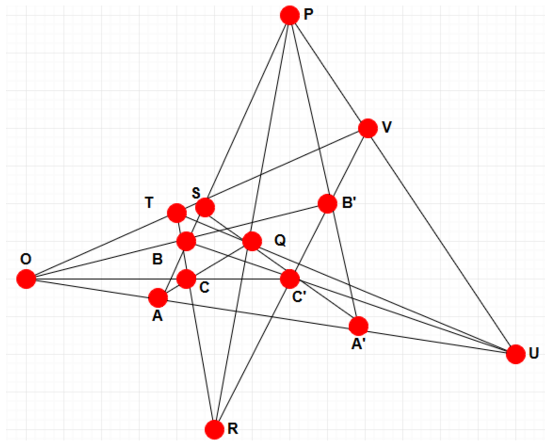
Observación 5.21. *Veamos que el Teorema de Pappus implica el de Desargues .*

Queremos ver que dos triángulos que están es perspectiva respecto a un punto, lo están respecto a una recta. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tal que las tres rectas que pasan por los respectivos vértices AA', BB' y CC' se intersecan en un único punto O. Entonces los tres pares de lados se intersecan en tres puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap B'C'$. Vemos que si se cumple el Teorema de Pappus, entonces P, Q y R son colineales.

Sea $S = A'C' \cap AB$ y sean las rectas OC, BA. Entonces por el Teorema de Pappus, como $O, C, C' \in OC$ y $B, P, A \in BA$ todos ellos distintos de $OC \cap BA$; se tiene que los puntos $T = OS \cap BC$, $U = OA \cap BC$ y Q son colineales.

Por otro lado tomando las rectas OB, CA, con $O, B, B' \in OB$ y $C, A', S \in CA$, todos ellos son distintos de $OB \cap CA$. Por el Teorema de Pappus los puntos U, $V = OS \cap C'B'$ y P también serán colineales.

Por último tomando las rectas TV y $C'B$, con $T, S, V \in TV$ y $C', U, B \in C'B$, todos ellos son distintos de $TV \cap C'B$. Tenemos así que por el Teorema de Pappus, los puntos $TU \cap SC' = Q$, $SB \cap VU = P$ y $TB \cap VC' = R$ son colineales, que era lo que queríamos probar.



Proposición 5.22. *El Axioma P7 es equivalente al Teorema de Pappus.*

6. Planos proyectivos sobre anillos de división

En este apartado nos centraremos en introducir planos proyectivos sobre anillos de división y en conocer algunas de sus características y propiedades. Por ejemplo, estudiaremos sus grupos de automorfismos, lo cuál nos resultará útil para introducir coordenadas en planos proyectivos generales. Además veremos la relación entre las propiedades de la estructura del anillo y los Axiomas $P6$ y $P7$. Probaremos que un plano proyectivo sobre un anillo de división R cumple $P6$ si y solo si $char(R) \neq 2$ y cumple $P7$ si y solo si R es conmutativo.

Definición 6.1. *Sea R un anillo de división. Denotaremos por $P^2(R)$ al* plano proyectivo sobre el anillo de división R. *Los puntos en $P^2(R)$ son las clases de equivalencias de 3-tuplas de R^3, $P = (x_1, x_2, x_3)$ $(\neq (0,0,0))$ con $x_1, x_2, x_3 \in R$, donde la relación de equivalencia en R^3 viene dada por $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3')$ si y solo si hay un elemento $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, tal que*

$$x_i' = x_i \lambda \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Las rectas son conjuntos de puntos satisfaciendo la ecuación lineal $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$, donde $c_1, c_2, c_3 \in R$ no todos cero a la vez.

Como el anillo de división no tiene por qué ser conmutativo, es muy importante tener en cuenta que en estas definiciones se multiplica a la izquierda.

Veamos que con esta definición, $P^2(R)$ es un plano proyectivo. Para ello comprobemos que satisface los cuatro Axiomas:

- $P2$:
  Sean dos rectas distintas l: $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ y m: $c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 = 0$, veamos que sólo tienen un punto en común, P. Para ello resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \\ c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 = 0 \end{cases}$$

  Como c_1, c_2, c_3 no son cero a la vez, suponemos que $c_1 \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & c_2' - c_1'c_1^{-1}c_2 & c_3' - c_1'c_1^{-1}c_3 \end{pmatrix}$$

  Aquí, $c_2' - c_1'c_1^{-1}c_2$ o $c_3' - c_1'c_1^{-1}c_3$ no son cero, ya que si no serían la misma recta. Supondremos que $c_2' - c_1'c_1^{-1}c_2 \neq 0$.
  Despejando tenemos que $l \cap m = P$, donde

$$P = (c_1^{-1}(-c_3 - c_2(c_2 - c_1'c_1^{-1}c_2)^{-1}(-(c_2'c_1'c_1^{-1}c_3))) \cdot x_3, \\ (c_2' - c_1'c_1^{-1}c_2)^{-1}(-(c_3' - c_1'c_1^{-1}c_3)) \cdot x_3, x_3),$$

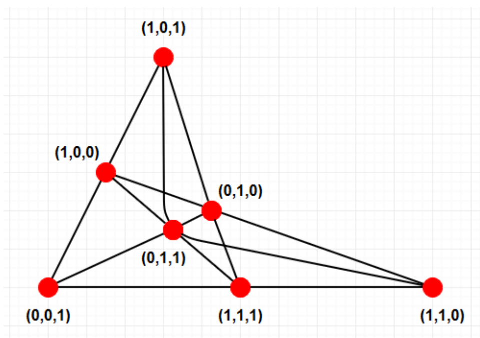
  con $x_3 \in R$.

- $P1$:
  Hemos visto en $P2$ que dos rectas distintas se intersecan en un único punto. Sean P y Q dos puntos distintos, y l, m dos rectas distintas que contienen a ambos puntos, entonces $l \cap m = \{P, Q\}$, que contradice $P2$. Por tanto, dos puntos de diferentes clases pertenecen a una única recta a la vez.

- $P3$:
  Como R es un anillo de división, en el peor de los casos R solo tendrá el elemento unitario del producto (e) y el elemento neutro de la suma (0). Con estos elementos podemos encontrar los siguientes puntos: $P_1 = (e, 0, 0)$, $P_2 = (0, e, 0)$ y $P_3 = (0, 0, e)$. Tomando la recta l: $x_3 = 0$, tenemos que $P_1, P_2 \in l$ pero $P_3 \notin l$. Por tanto, ya tenemos la existencia de tres puntos no colineales.

- $P4$:
  Sea la recta l: $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$:
  a) Si $c_1, c_2, c_3 \neq 0$, entonces tres puntos diferentes de l son: $(-c_1^{-1}c_2, e, 0)$, $(-c_1^{-1}c_3, 0, e)$ y $(-c_1^{-1}c_2 - c_1^{-1}c_3, e, e)$.
  b) Caso en el que solo un $c_i = 0$, con $i \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c_1 = 0$, entonces los tres puntos de l son: $(e, 0, 0)$, $(0, -c_2^{-1}c_3, e)$ y $(e, -c_2^{-1}c_3, e)$.
  c) Por último nos encontramos con el caso en el que solo un $c_i \neq 0$, para $i = 1, 2, 3$. Sea $c_1 \neq 0$ por ejemplo, entonces encontramos que $(0, e, e), (0, e, 0), (0, 0, e) \in l$.

Ejemplo 6.2. *Tomando $R = \mathbb{Z}_2$ el cuerpo de dos elementos $\{0, 1\}$, tenemos el plano proyectivo de siete puntos.*



Ejemplo 6.3. *Si $R = \mathbb{Z}_p$ para cualquier primo p, entonces $P^2(R)$ es un plano proyectivo con $p^2 + p + 1$ puntos y cada recta tendrá $p + 1$ puntos (por la Observación 3.13.).*

Ejemplo 6.4. *Si tomamos $R = \mathbb{R}$ obtenemos el plano proyectivo real.*

Ejemplo 6.5. ***Cuaternios***
Los cuaternios son un anillo de división no conmutativo introducido por W. Hamilton. El conjunto de los cuaternios se denota por la letra H, y son uno de los ejemplos de una clase más amplia de números, también descubiertos por Hamilton, los hipercomplejos. A pesar de no ser conmutativos, los cuaternios sí son asociativos, los elementos distintos de cero formando un grupo con la multiplicación.

Los cuaternios admiten diversas representaciones:

- *Por analogía con los números complejos, se pueden representar como la suma de una parte real y una imaginaria,*

$$H = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k,$$

- *Tienen una forma matricial,*

$$H = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & c + i \cdot d \\ -c + i \cdot d & a - i \cdot d \end{pmatrix}$$

Y se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{gathered}$$

En estas desigualdades podemos observar que los cuaternios no son conmutativos. La suma de dos cuaternios es similar a la de dos complejos; cada coordenada se suma con su homóloga del otro número. El conjugado de un cuaternio también es similar al de un complejo. Los cuaternios se multiplican como combinaciones lineales de las unidades imaginarias.

Se comprueba que en los cuaternios sobre $\mathbb{R}$ cada elemento distinto de cero tiene inverso.

Teorema 6.6. *El plano $P^2(R)$, con R un anillo de división, siempre satisface el Axioma de Desargues $P5$.*

Observación sobre Geometría Proyectiva n-dimensional:
Definimos un espacio proyectivo n-dimensional $P^n(R)$ sobre un anillo de división, R, como el conjunto de puntos $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ con la siguiente relación de equivalencia

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \sim (x_1, \cdots, x_{n+1})\lambda = (x_1\lambda, \cdots, x_{n+1}\lambda), \text{ con } \lambda\ (\neq 0) \in R.$$

Los n-planos o hiperplanos son el conjunto de puntos satisfaciendo la siguiente ecuación lineal

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i = 0.$$

Los k-planos son el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente $n+1-k$ ecuaciones lineales distintas. Por ejemplo, los 1-planos son los puntos, los 2-planos son las rectas...

6.1. Grupo de automorfismos de P^2(R)

Proposición 6.7. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz 3×3 invertible con entradas en R. Entonces las ecuaciones lineales*

$$x'_i = \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

definen un automorfismo, T_A, de $P^2(R)$ dado por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x'_1, x'_2, x'_3).$$

Lema 6.8. *Sean A y A' dos matrices invertibles. Entonces, los automorfismos T_A y $T_{A'}$ tendrán el mismo efecto en cuatro puntos $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$ y $P_4 = (1, 1, 1)$ si y solo si existe $\mu \in R$, con $\mu \neq 0$, tal que $A' = A\mu$.*

Lema 6.9. *Sea $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ y consideremos las matriz diagonal λI. Entonces, $T_{\lambda I}$ es la transformación identidad de $P^2(R)$ si y solo si λ pertenece al centro de R. Además, $T_{\lambda I}$ es el automorfismo dado por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3))$, donde σ es un automorfismo de $P^2(R)$ tal que $x \mapsto \lambda x \lambda^{-1}$. Es decir, σ es un automorfismo interno.*

Definición 6.10. *Denotamos por $PGL(2, R)$ al grupo de automorfismos de $P^2(R)$ de la forma T_A, para alguna matriz 3×3 invertible, A. A $PGL(2, R)$ se le denomina el grupo lineal proyectivo del plano sobre R. Notemos que $PGL(2, R)$ es un grupo.*

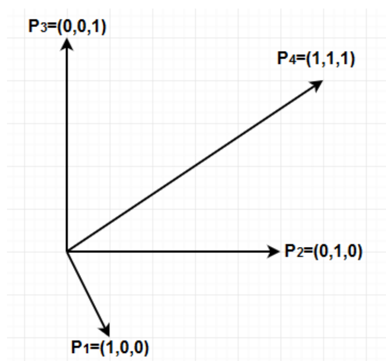
Proposición 6.11. *Sean A y A' dos matrices invertibles. Entonces $T_A = T_{A'}$ si y solo si existe λ perteneciente al centro de R, $\lambda \neq 0$, tal que $A' = A\lambda$.*

Teorema 6.12. *Sean A, B, C, D y A', B', C', D' dos cuaternas de puntos, de modo que ninguna elección de tres puntos en cada cuaterna da puntos colineales. Entonces existe un automorfismo $T \in PGL(2, R)$ tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$ y $T(D) = D'$. Si además R es un cuerpo, entonces T es único.*

Proposición 6.13. *Sea ϕ un automorfismo de $P^2(R)$ tal que deja fijos los cuatro puntos mencionados en el Lema 6.8.. Entonces existe un automorfismo $\sigma \in AutR$, tal que*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3)).$$

Demostración: Notemos que ϕ deja fijo la recta $x_3 = 0$, ya que esta recta contiene a los puntos P_1 y P_2. Tomaremos esta recta, como la recta del infinito y consideremos el plano afín: $\mathbb{A} = P^2(R) - \{x_3 = 0\}$.



Nuestro automorfismo ϕ envía $\mathbb{A}$ a sí mismo, luego es un automorfismo entre planos afines. Usaremos coordenadas afines: $x = x_1 x_3^{-1}$ e $y = x_2 x_3^{-1}$. Entonces, P_1 y P_2 son puntos del infinito en rectas de pendiente 0 e ∞ respectivamente; mientras que P_3 y P_4 reciben las coordenadas afines $(0, 0)$ y $(1, 1)$ respectivamente. Como ϕ deja fijo a P_1 y P_2, ϕ enviará rectas horizontales a horizontales y rectas verticales a verticales. Como además deja también fijo los puntos P_3 y P_4, ϕ dejará fijo el eje x y el eje y.

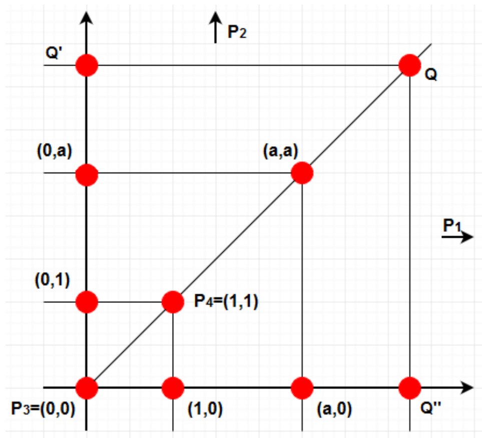
Sea $(a, 0)$ un punto del eje x. Entonces $(\phi(a, 0))$ está sobre el eje x, luego podremos escribirlo como $(\sigma(a), 0)$, para algún elemento adecuado $\sigma(a) \in R$. Tenemos definida así la aplicación $\sigma : R \longrightarrow R$. Es fácil ver que $\sigma(0) = 0$, ya que $\phi(P3) = P3$, y además $\sigma(1) = 1$, ya que ϕ deja fija la recta horizontal $y = 0$ y la recta vertical $x = 1$, y por tanto a su intersección el punto $(1, 0)$.

ϕ envía la recta $x = y$ a sí misma, ya que deja fijos a P_3 y P_4. Como rectas verticales van a rectas verticales, entonces:

$$(a, a) = (\text{recta } x = y) \cap (\text{recta } x = a) \longmapsto (\sigma(a), \sigma(a)) = (\text{recta } x = y) \cap (\text{recta } x = \sigma(a)).$$

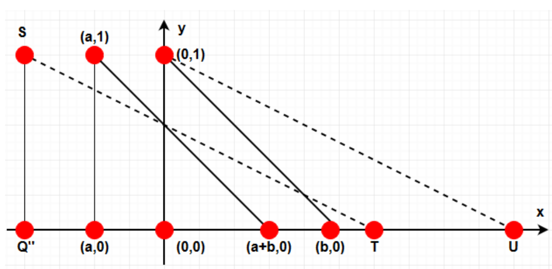
De forma análoga se deduce que $\phi(0, a) = (0, \sigma(a))$ y que si (a, b) es un punto, tomando las rectas $x = a$ e $y = b$ tenemos que $\phi(a, b) = (\sigma(a), \sigma(b))$.

Sean los puntos $Q = (\sigma(a), \sigma(a))$, $Q' = (0, \sigma(a))$ y $Q'' = (\sigma(a), 0)$.



Veamos que σ es un automorfismo de R. Sean $a, b \in R \setminus \{0\}$. Consideremos los puntos sobre el eje x: $(a, 0)$ y $(b, 0)$. Podemos construir el punto $(a + b, 0)$ geométricamente de la siguiente forma:

- (1) Dibujamos una recta n que una $(0, 1)$ y $(b, 0)$.
- (2) Dibujamos una recta r paralela a n que pase por $(a, 1)$.
- (3) La intersección de r con el eje x será $(a + b, 0)$.

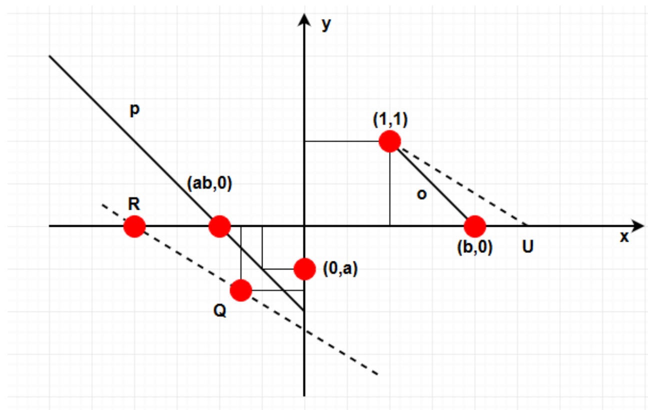


Tenemos que ϕ respeta uniones, intersecciones y paralelismos. Entonces $\phi(r) \parallel \phi(n)$, donde $\phi(r)$ es la recta que pasa por $S = (\sigma(a), 1)$ y $\phi(n)$ la recta que pasa por $(0, 1)$ y $U = (\sigma(b), 0)$. De esta forma la intersección de $\phi(r)$ con el eje x es el punto $T = (\sigma(a) + \sigma(b), 0)$. Por otro lado, el punto $(a + b, 0)$ es la intersección de r con el eje x, luego $\phi((a + b, 0)) = (\sigma(a + b), 0)$ será el punto de intersección de $\phi(r)$ con el eje x. Por lo tanto:

$$\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a + b).$$

Realicemos otra construcción para obtener el punto $(ab, 0)$:

- (1) Dibujamos una recta o que pase por $(1, 1)$ y $(b, 0)$.
- (2) Dibujamos una recta p paralela a o que pase por (a, a).
- (3) La intersección de p con el eje x nos dará el punto $(ab, 0)$.



En este caso tenemos que $\phi(o) \parallel \phi(p)$, donde $\phi(p)$ es la recta que pasa por $(\sigma(a), \sigma(a))$ $(= Q)$ y $\phi(o)$ es la recta que une $(1,1)$ con $U = (\sigma(b), 0)$. Entonces la intersección de $\phi(p)$ con el eje x nos da el punto $R = (\sigma(b)\sigma(a), 0)$. Por otro lado el punto $(ba, 0)$ es la intersección de p con el eje x. Entonces, $\phi((ba, 0)) = (\sigma(ba), 0)$, que es la intersección de $\phi(p)$ con el eje x. Por tanto,

$$\sigma(b)\sigma(a) = \sigma(ba).$$

Luego σ es un automorfismo de R.

Continuemos en el plano proyectivo $P^2(R)$ para mostrar el efecto de ϕ en un punto con coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3). Veamos que su imagen es el punto $(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3))$.

- **Caso 1:** Si $x_3 = 0$ podemos escribir el punto como la intersección de la recta $x_3 = 0$ y la recta que une los puntos $(0, 0, 1)$ y $(x_1, x_2, 1)$. Ahora este punto $(x_1, x_2, 1)$ esta en $\mathbb{A}$ y tiene coordenadas afines (x_1, x_2). Entonces ϕ lo transforma en el punto $(\sigma(x_1), \sigma(x_2))$, cuyas coordenadas homogéneas son $((\sigma(x_1), \sigma(x_2), 1))$. Por la intersección de las rectas transformadas, tenemos que

$$\phi(x_1, x_2, 0) = (\sigma(x_1), \sigma(x_2), 0).$$

- **Caso 2:** Si $x_3 \neq 0$, entonces el punto (x_1, x_2, x_3) está en $\mathbb{A}$ y tendrá coordenadas afines $x = x_1 x_3^{-1}$, $y = x_2 x_3^{-1}$. Entonces,

$$\phi(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y)) = (\sigma(x_1)\sigma(x_3)^{-1}, \sigma(x_2)\sigma(x_3)^{-1}).$$

Por tanto, $\phi(x, y)$ tiene coordenadas $(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3))$. $\square$

Proposición 6.14. *La aplicación $\Psi : AutR \to AutP^2(R)$ dada por $\sigma \mapsto S_\sigma$ es un isomorfismo de $AutR$ al subgrupo H de $AutP^2(R)$, constituido por los automorfismos que dejan fijos los puntos P_1, P_2, P_3, P_4.*

Teorema 6.15. *Los dos subgrupos $PGL(2, R)$ y H generan $AutP^2(R)$. La intersección K de $PGL(2, R)$ y H es isomorfa al grupo de los automorfismos internos de R.*

Ahora estamos en condiciones de determinar el grupo de automorfismos del plano proyectivo real.

Proposición 6.16. *El automorfismo identidad es el único automorfismo del cuerpo de los números reales.*

Teorema 6.17. $PGL(2, \mathbb{R}) = AutP^2(\mathbb{R})$.

Demostración:

Por la Proposición 6.16., $H = \{1\}$. Entonces por el Teorema 6.15., el subgrupo $PGL(2, \mathbb{R})$ es el grupo entero $AutP^2(\mathbb{R})$.

Teorema 6.18. ***Teorema fundamental en dimensión*** **2**
Sean $ABCD$ y $PQRS$ dos cuadrángulos completos en $P^2(\mathbb{R})$. Entonces existe un único automorfismo de $P^2(\mathbb{R})$, T, tal que $T(A) = P$, $T(B) = Q$, $T(C) = R$ y $T(D) = S$.

6.2. Significado algebraico de los Axiomas $P6$ y $P7$

Veamos a continuación unos resultados que nos aclaran cuándo un plano proyectivo del tipo $P^2(R)$ cumple los Axiomas $P6$ y $P7$.

Teorema 6.19. *El Axioma de Fano, $P6$, se cumple en $P^2(R)$ si y solo si la característica de R es $\neq 2$.*

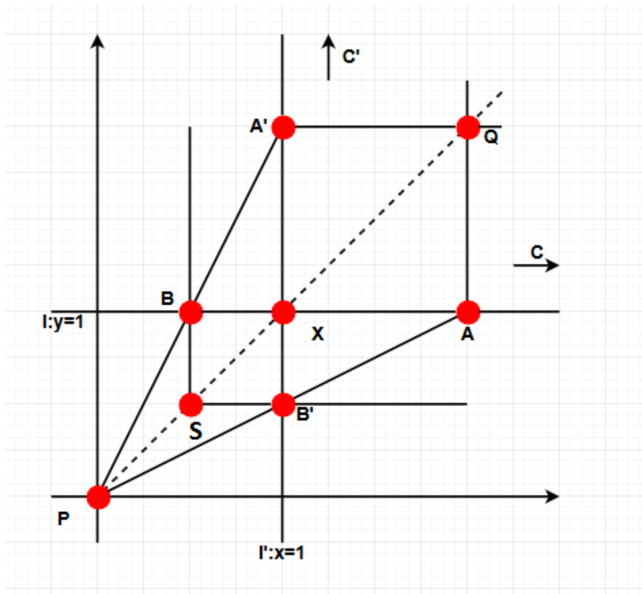
Teorema 6.20. ***Teorema de Hilbert***
El Teorema fundamental $P7$ se cumple en un plano proyectivo sobre un anillo de división, $P^2(R)$, si y solo si R es conmutativo.

Demostración: Recordemos que el Teorema fundamental $P7$ es equivalente al Teorema de Pappus. Veamos que en $P^2(R)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

- Sean dos rectas cualesquiera l , l' y sus puntos $A, B, C \in l$, $A', B', C' \in l'$ todos distintos al punto $X = l \cap l'$, entonces los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ y $S = BC' \cap B'C$ son colineales.

- R es un cuerpo.

Sean P, X, C, C' cuatro puntos arbitrarios, sabemos por el Teorema 6.12. que podemos encontrar un automorfismo tal que envíe P, X, C, C' a los puntos $(0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ respectivamente. Pasemos a coordenadas afines con $x_3 = 0$ la recta del infinito. P y X tendrán las coordenadas $(0, 0)$ y $(1, 1)$ respectivamente, mientras que C y C' son puntos del infinito. Debido a que $XC = l$ y $XC' = l'$, entonces tenemos que l es la recta $y = 1$ y l' es la recta $x = 1$.



Asignamos a los puntos A y B en $y = 1$ las coordenadas $(a, 1)$ y $(b, 1)$ respectivamente. Podemos deducir las coordenadas del resto de puntos con la siguiente observación: En $A^2(R)$, donde R es conmutativo o no, dos puntos (p, q) y (u, v), con $p, u \neq 0$, son colineales en una recta pasando por P si y solo si $p^{-1}q = u^{-1}v$. Entonces ambos puntos viven en la recta $y = xm$. Ya que, A, B' y P son colineales, y B' pertenece a la recta $x = 1$, se tiene que B' tiene coordenadas $(1, a^{-1})$. De forma similar, las coordenadas de A' serán $(1, b^{-1})$.

Ahora, $S = BC' \cap B'C$ es la intersección de dos rectas paralelas a l y a l' en el plano afín, y como conocemos las coordenadas de B y B', se deduce que sus coordenadas son (b, a^{-1}). De forma similar, $Q = A'C \cap AC'$ tendrá por coordenadas (a, b^{-1}) . Entonces, por la observación comentada anteriormente, P, Q y S serán colineales si y solo si

$$a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1} \Leftrightarrow ab = ba.$$

Por tanto, esto muestra que cumplirse la propiedad conmutativa de la multiplicación en R es equivalente a demostrar el Teorema de Pappus.

$\square$

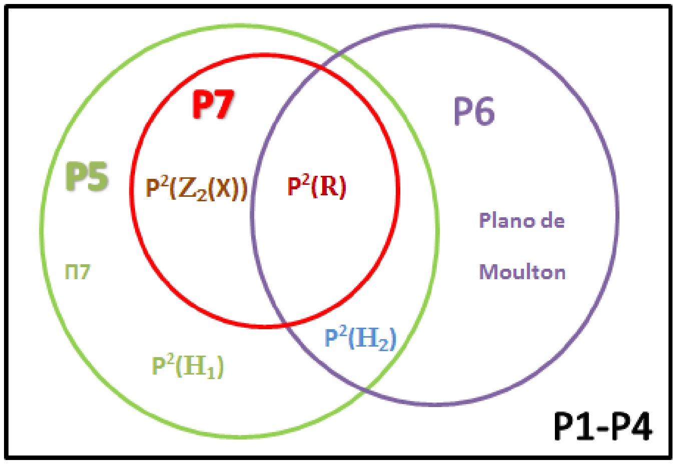
Ejemplo 6.21. *El plano proyectivo de siete puntos, $\pi 7$, cumple $P5$, pero no $P6$ y $P7$.*

Ejemplo 6.22. *El plano proyectivo real, $P^2(\mathbb{R})$, cumple $P5$, $P6$ y $P7$.*

Ejemplo 6.23. *El plano de Moulton no cumple $P5$ ni $P7$. Sin embargo, sí $P6$.*

Ejemplo 6.24. *Sea H el anillo de división de los cuaternios. Entonces $P^2(H)$ cumple $P5$, $P6$; pero no $P7$, ya que H no es conmutativo.*

Ejemplo 6.25. *Sea R un anillo de división no conmutativo de característica 2, entonces $P^2(R)$ cumple $P5$, pero no $P6$ y $P7$.*



Con $\mathbb{H}_1$ el anillo de los cuaternios sobre $\mathbb{Z}_2$.

Con $\mathbb{H}_2$ el anillo de los cuaternios sobre $\mathbb{R}$.

Con $\mathbb{Z}_2(x) = \{\frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x], g(x) \neq 0\}$, el cuerpo de las funciones racionales sobre $\mathbb{Z}_2$.

7. Introducción de coordenadas en un plano proyectivo

Definiendo los Axiomas menor y mayor de Desargues en un plano afín vamos a ser capaces de introducir coordenadas en planos afines que verifiquen dichos axiomas, y a partir de aquí, en los planos proyectivos que son la complección de estos planos afines.

Como consecuencia se prueba que todo plano proyectivo que verifique el Axioma de Desargues es un plano proyectivo sobre un anillo de división.

7.1. Axiomas mayor y menor de Desargues

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín. Recordemos que una dilatación en $\mathbb{A}$ es un automorfismo donde la imagen de cualquier recta de $\mathbb{A}$ es otra recta paralela a ella. Cualquier dilatación diferente a la identidad deja fijo a lo sumo un punto. Cuando no deja puntos fijos, la denominamos traslación. Si por el contrario fija un punto, la llamamos dilatación central. A la dilatación identidad la consideramos una traslación.

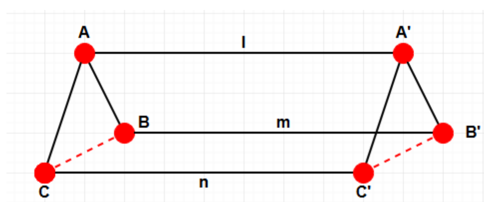
Proposición 7.1. *El conjunto de las dilataciones de $\mathbb{A}$, $Dil\mathbb{A}$, es un grupo bajo la composición. Además, $Dil\mathbb{A}$ es un subgrupo de $Aut\mathbb{A}$.*

Proposición 7.2. *El conjunto de las traslaciones, $Tran\mathbb{A}$, es un subgrupo normal de $Dil\mathbb{A}$.*

Pero, ¿cuándo existen dilataciones y traslaciones en $\mathbb{A}$?

Para resolver esta duda, necesitaremos la ayuda de los Axiomas menor y mayor de Desargues.

- *A*4. **Axioma menor de Desargues:** Sean l, m, n tres rectas paralelas distintas y sean los puntos A, $A' \in l$, B, $B' \in m$ y C, $C' \in n$. Si asumimos que $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$, entonces $BC \parallel B'C'$.

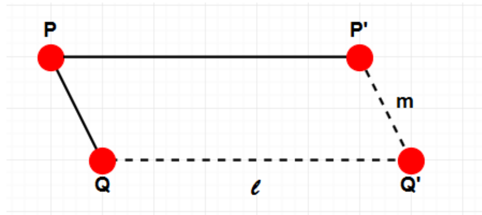


Teorema 7.3. *Sea $\mathbb{A}$ un plano afín. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

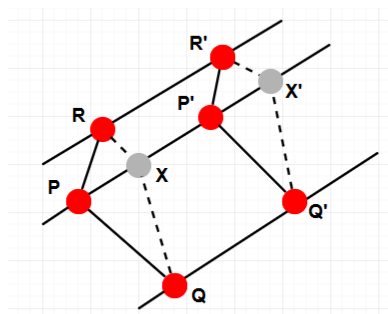
- *El Axioma A4 se cumple en $\mathbb{A}$.*
- *Dados dos puntos cualesquiera, $P, P' \in \mathbb{A}$, existe una única traslación, τ, tal que $\tau(P) = P'$.*

Demostración: Asumamos $A4$. Si $P = P'$, entonces la identidad es la única traslación que deja fijo al punto P, luego no tendremos que probar nada.

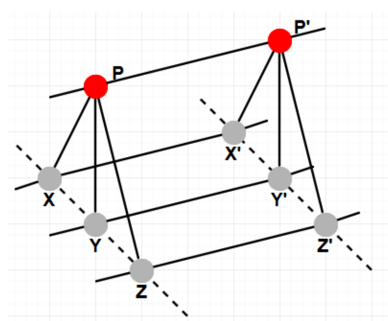
Supongamos ahora que $P \neq P'$. Construyamos una traslación τ tal que $\tau(P) = P'$. Sea $Q \notin PP'$ y $Q' = l \cap m$, donde $l \parallel PP'$, $Q \in l$ y $m \parallel PQ$, $P' \in m$. Definimos $\tau(Q) = Q'$. Esta definición de τ es válida para todos los puntos salvo los de la recta PP'.



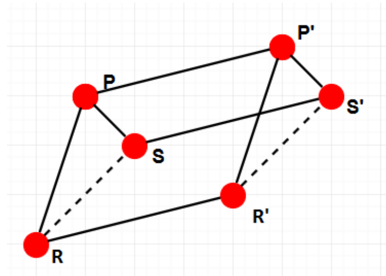
Sea $X \in PP'$, sea X' el cuarto vértice definido por el paralelogramo de vértices X, Q y Q'. Definimos $\tau(X) = X'$. Veamos que hemos conseguido una definición no ambigua de τ. Dados R, R' tal que $RR' \parallel PP'$ y $PR \parallel P'R'$, luego $\tau(R) = R'$, entonces por $A4$ se sigue que $RQ \parallel R'Q'$. Debido a que $XQ \parallel X'Q'$, tenemos que que $RX \parallel R'X'$ (también por $A4$). Por lo tanto, X' se obtiene de nuevo al reemplazar Q, Q' por R, R'.



Comprobemos que la imagen por τ de puntos colineales, X, Y y Z, son también puntos colineales, X', Y' y Z'. Aplicando $A4$ a las rectas paralelas PP', XX' y YY', tenemos que $XY \parallel X'Y'$. De forma similar, aplicándolo a PP',YY' y ZZ', tenemos que $YZ \parallel Y'Z'$. Pero como X, Y, y Z son colineales, $XY = YZ$, por lo tanto $X'Y' \parallel Y'Z'$. Entonces, $X'Y' = Y'Z'$.



Veamos que τ es una dilatación. Sean R, S, dos puntos distintos que no están en PP'. Por $A4$ llegamos a que $RS \parallel R'S'$. Se prueba similarmente el resto de casos. Además, se ve claramente por construcción del paralelogramo que τ no deja puntos fijos.



Por último comprobemos la unicidad de τ. Supongamos que τ' es otra traslación tal que $\tau'(P) = P'$. Entonces $\tau'\tau^{-1}$ es una traslación que deja fijo un punto, por lo que solo puede ser la identidad. Luego $\tau' = \tau$.

Asumamos ahora la existencia de traslaciones y probemos que entonces se cumple $A4$. Supongamos que tenemos las rectas y puntos l, m, n, A, A', B, B', C, C' como en el enunciado de $A4$. Sea τ una traslación tal que $\tau(A) = A'$. Entonces $\tau(B) = B'$, esto se debe a que $AB \parallel A'B'$ y $AA' \parallel BB'$. De la misma forma llegamos a que $\tau(C) = C'$. Entonces como τ es una dilatación, $BC \parallel B'C'$. □

Proposición 7.4. *Asumiendo $A4$, el grupo $Tran\mathbb{A}$ es abeliano.*

Demostración: Sean τ, τ' dos traslaciones de $Tran\mathbb{A}$. Veamos que $\tau\tau' = \tau'\tau$:

- Caso 1: Supongamos que τ y τ' son traslaciones en diferentes direcciones. Sea P un punto. Sea $\tau(P) = P'$ y $\tau'(P) = Q$. Asumamos que P, P', Q no son colineales. Entonces $\tau(Q) = \tau\tau'(P)$ y $\tau'(P') = \tau'\tau(P)$ es el cuarto vértice del paralelogramo determinado por P, P' y Q. Por tanto $\tau\tau' = \tau'\tau$.

- Caso 2: Supongamos que τ y τ' están en la misma dirección. Por el Teorema 7.3. existe una traslación σ en diferente dirección. Entonces:

$$\tau\tau' = \tau\tau'\sigma\sigma^{-1} = \tau(\tau'\sigma)\sigma^{-1}$$

Observamos que ahora τ y $\tau'\sigma$ no tendrán la misma dirección, luego por el Caso 1, $\tau(\tau'\sigma) = (\tau'\sigma)\tau$. Luego $\tau(\tau'\sigma)\sigma^{-1} = (\tau'\sigma)\tau\sigma^{-1} = \tau'(\sigma\tau)\sigma^{-1}$. De la misma forma, σ^{-1} y $(\sigma\tau)$ no podrán tener la misma dirección y por tanto, por el Caso 1, también podremos intercambiarlos:

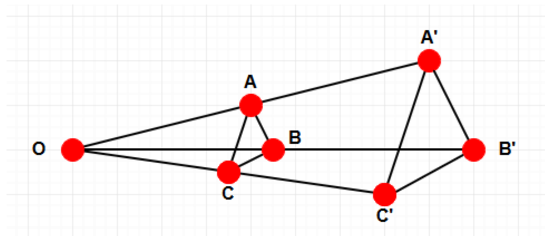
$$\tau\tau' = \tau\tau'\sigma\sigma^{-1} = \tau(\tau'\sigma)\sigma^{-1} = \tau'(\sigma\tau)\sigma^{-1} = \tau'\sigma^{-1}\sigma\tau = \tau'\tau$$

□

Definición 7.5. *Sea O un punto de $\mathbb{A}$, y definimos $Dil_O(\mathbb{A})$ como el subconjunto de $Dil\mathbb{A}$ constituido por todas las dilataciones que dejan fijo el punto O. Se puede probar que $Dil_O(\mathbb{A})$ es un grupo.*

Proposición 7.6. *Asumiendo $A4$, $Dil\mathbb{A}$ es el producto semidirecto de $Tran\mathbb{A}$ y $Dil_O(\mathbb{A})$.*

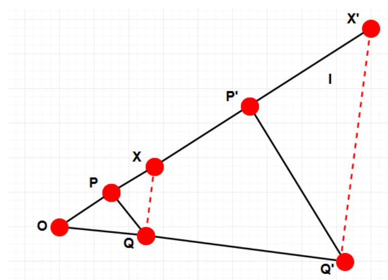
- $A5$. **Axioma mayor de Desargues:** Sean O, A, B, C, A', B', C' distintos puntos de un plano afín $\mathbb{A}$. Si asumimos que O, A, A' son colineales, O, B, B' son colineales, O, C, C' son colineales, $AB \parallel A'B'$, y $AC \parallel A'C'$, entonces $BC \parallel B'C'$.



Teorema 7.7. *Sea $\mathbb{A}$ un plano afín, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *El Axioma $A5$ se cumple en $\mathbb{A}$.*
- *Dados O, P, P' tres puntos tal que $P \neq O$, $P' \neq O$, y O, P, P' son colineales, entonces existe una única dilatación σ de $\mathbb{A}$ tal que $\sigma(O) = O$ y $\sigma(P) = P'$.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{A}$ cumple $A5$. Dados O, P, P' como en el enunciado, definimos la dilatación σ para los puntos $Q \notin l$, donde l es la recta que contiene a O, P, P', de modo que $\sigma(Q) = Q'$, con Q' la intersección de la recta OQ con la recta paralela a PQ que pasa por P'.



Definimos para $X \in PP'$, $\sigma(X) = X'$, con X' el punto de intersección de la recta l con la recta paralela a XQ que pasa por Q'.

En el resto de la demostración de esta implicación, se procede de forma similar a la del Teorema 7.3., reemplazando el paralelogramo por el trapezoide.

Sean O, A, B, C, A', B', C' puntos que cumplen las hipótesis de $A5$. Sea σ una dilatación que deja fijo al punto O y envía A a A'. Entonces $\sigma(B) = B'$ ya que $\sigma(OB) \parallel OB$ implica que $\sigma(OB) = OB$ y $\sigma(AB) \parallel AB$. De la misma forma llegamos a que $\sigma(C) = C'$. Como σ es una dilatación, $BC \parallel B'C'$. $\square$

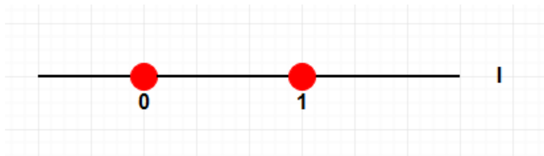
Proposición 7.8. $A5$ *implica* $A4$.

Observación: Un plano proyectivo se denomina plano alternativo cuando se verifica $A4$ pero no $A5$. Más tarde veremos que estos planos también pueden ser dotados de coordenadas.

7.2. Anillos de coordenadas de un plano afín desarguesiano

En este apartado, nos dedicaremos a la construcción del anillo de coordenadas de un plano afín, $\mathbb{A}$, que satisface los axiomas $A4$ y $A5$.

Fijamos una recta $l \in \mathbb{A}$ y dos puntos, 0 y 1, en l. Tomaremos R como el conjunto de puntos de l.



Sea $a \in R$. Por $A4$ y el Teorema 7.3. existe una única traslación, τ_a, tal que $\tau_a(0) = a$. De forma similar, por $A5$ y el Teorema 7.7. y asumiendo que $a \neq 0$, existe una única dilatación, σ_a, que deja fijo al 0 y tal que $\sigma_a(1) = a$.

Definamos la suma y multiplicación en R:

- **Suma:** Sean $a, b, c \in R$,

$$a + b = \tau_a \tau_b(0) = \tau_a(b).$$

Notemos que $\tau_{a+b} = \tau_a \tau_b$ debido a que $\tau_{a+b}(0) = a + b$, $\tau_a \tau_b(0) = a + b$, y a que dos traslaciones son iguales si coinciden en la imagen de un punto.

Como las traslaciones forman un grupo abeliano, será fácil probar las propiedades asociativa y conmutativa de R bajo la suma:

-*Asociativa.*

$$(a + b) + c = \tau_{a+b}\tau_c(0) = (\tau_a \tau_b)\tau_c(0) = \tau_a(\tau_b \tau_c)(0) = a + (b + c).$$

-*Conmutativa.*

$$a + b = \tau_a \tau_b(0) = \tau_b \tau_a(0) = b + a.$$

Sabemos que solo existe una única traslación que deja fijos a todos los puntos, que es la identidad. La denotaremos por τ_0 y diremos que 0 es el elemento neutro de R respecto a la suma.

Por último, definimos $-a = \tau_a^{-1}(0)$ como el elemento inverso de a. En efecto,

$$a + (-a) = \tau_a \tau_a^{-1}(0) = \tau_0(0) = 0,$$
$$(-a) + a = \tau_a^{-1}\tau_a(0) = \tau_0(0) = 0.$$

Por tanto, R es un grupo abeliano con la suma.

- **Multiplicación:** Acordemos primero que $a \cdot 0 = 0$ para cualquier a. Supongamos que $b \neq 0$,

$$a \cdot b = \sigma_b(a) = \sigma_b \sigma_a(1).$$

Como las dilataciones forman un grupo, es fácil probar que R con la multiplicación cumple la propiedad asociativa. Notemos que $\sigma_{ab} = \sigma_b \sigma_a$ ya que ambas son dilataciones que verifican $\sigma_{ab}(1) = ab$, $\sigma_b \sigma_a(1) = ab$.

-*Asociativa.*

$$(ab)c = \sigma_c(ab) = \sigma_c \sigma_{ab}(1) = \sigma_c(\sigma_b \sigma_a)(1) = (\sigma_c \sigma_b)\sigma_a(1) = \sigma_{bc}\sigma_a(1) = \sigma_{bc}(a) = a(bc).$$

Tomaremos 1 como el elemento neutro, ya que $1{\cdot}a = \sigma_a(1) = a = \sigma_1(a) = \sigma_1\sigma_a(1) = \sigma_{a\cdot 1}(1) = a \cdot 1$, debido a que $\sigma_1 = id$.

Además definiremos $a^{-1} = \sigma_a^{-1}(1)$ como el elemento inverso de a. Notemos que $\sigma_{a^{-1}}(1) = a^{-1} = \sigma_a^{-1}(1)$, luego $\sigma_a\sigma_{a^{-1}}(1) = 1$ y así $\sigma_a^{-1} = (\sigma_a)^{-1}$,

$$a \cdot a^{-1} = \sigma_{a^{-1}}\sigma_a(1) = \sigma_a^{-1}\sigma_a(1) = 1 = \sigma_a\sigma_a^{-1}(1) = \sigma_a(a^{-1}) = a^{-1} \cdot a.$$

De esta forma, el conjunto de los elementos ($\neq 0$) de R con la multiplicación forman un grupo.

Observemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$\tau_{ab}(0) = ab = \sigma_b(a) = \sigma_b(\tau_a(0)) = \sigma_b\tau_a\sigma_b^{-1}(0),$$

De aquí deducimos que como por la Proposición 7.2. $\sigma_b\tau_a\sigma_b$ es una traslación, $\tau_{ab} = \sigma_b\tau_a\sigma_b^{-1}$ y por otro lado ya habíamos visto que $\sigma_{ab} = \sigma_b\sigma_a$.

Por último, con esta definición, veamos que se cumple la propiedad distributiva. Como la multiplicación está definida asimétricamente, deberemos distinguir dos casos.

-Consideremos $(a + b)c$. Si $c = 0$, $(a + b)c = 0 = ac + ab$. Si $c \neq 0$, usando las fórmulas anteriores,

$$\tau_{(a+b)c} = \sigma_c\tau_{a+b}\sigma_c^{-1} = \sigma_c\tau_a\tau_b\sigma_c^{-1} = \sigma_c\tau_a\sigma_c^{-1}\sigma_c\tau_b\sigma_c^{-1} = \tau_{ac}\tau_{bc},$$

que evaluándolo en 0 nos da $(a + b)c = ac + bc$.

-Falta ver la propiedad distributiva multiplicando a izquierda. Para ello necesitaremos nuevas nociones.

Denotamos por $Tran_m(\mathbb{A})$ al grupo de traslaciones en dirección m, para cualquier recta m de $\mathbb{A}$. Es decir, sea $\tau \in Tran(\mathbb{A})$, entonces $\tau \in Tran_m(\mathbb{A})$ si $\tau = id$ o si para todo $P \in \mathbb{A}$, $PP' \parallel m$, donde $P' = \tau(P)$.

Sean m, n dos rectas de $\mathbb{A}$. Sean $\tau' \in Tran_m(\mathbb{A})$ y $\tau'' \in Tran_n(\mathbb{A})$ dos traslaciones fijas diferentes de la identidad y sea o un punto fijo de $\mathbb{A}$. Para cada $\tau \in Tran_m(A)$, con $\tau \neq id$, existe por el Teorema 7.7. una única dilatación central, σ, que deja fijo a o y tal que $\sigma(\tau'(o)) = \tau(o)$. Entonces $\tau = \sigma\tau'\sigma^{-1}$, luego τ y $\sigma\tau'\sigma^{-1}$ son traslaciones que coinciden en o.
Definamos la aplicación ϕ como:

$$\begin{aligned} \phi : \quad Tran_m(\mathbb{A}) &\longrightarrow Tran_n(\mathbb{A}) \\ \tau &\longmapsto \phi(\tau) = \sigma\tau''\sigma^{-1} \end{aligned}$$

Comprobemos que $\sigma\tau''\sigma^{-1}$ es una traslación con la misma dirección de n.

En efecto, valoremos $\sigma\tau''\sigma^{-1}\tau(0) = \sigma\tau''\tau'(0)$ ya que $\sigma\tau'(0) = \tau(0)$.
Como $\tau'' \in Tran_m(\mathbb{A})$ se tiene que la recta que determinan $\tau'(0)$ y $\tau''(\tau'(0))$ es paralela a n. Como σ es una dilatación $\sigma\tau'(0)$ $() = \tau(0)$ y $sigma(\tau''\tau'(0))$ determinan una recta paralela a n también. Pero entonces $\sigma\tau''\sigma^{-1}$ es una traslación en la dirección de n.

Lema 7.9. *$\phi : Tran_m(A) \to Tran_n(A)$ es un homomorfismo de grupos.*

Ahora estamos en condiciones de acabar de probar la propiedad distributiva. Consideremos $\lambda(a+b)$. Usaremos el lema tomando $m = n = l$, $o = 0$, $\tau' = \tau_1$ y $\tau'' = \tau_\lambda$. Entonces, $\phi : Tran_l(\mathbb{A}) \to Tran_l(\mathbb{A})$ donde τ_a tiene imagen a $\tau_{\lambda a}$ para cualquier $a \in \mathbb{A}$. En efecto, por la igualdad vista anteriormente, $\tau_{\lambda a} = \sigma_a \tau_\lambda \sigma_a^{-1}$, y por definición de ϕ, $\phi(\tau_a) = \sigma_a \tau_\lambda \sigma_a^{-1} = \tau_{\lambda a}$. Como ϕ es homomorfismo, por el Lema 7.9., entonces $\phi(\tau_a \tau_b) = \phi(\tau_a)\phi(\tau_b)$, de donde se sigue que $\phi(\tau_{a+b}) = \phi(\tau_a)\phi(\tau_b)$. Luego,

$$\tau_{\lambda(a+b)} = \tau_{\lambda a}\tau_{\lambda b} = \tau_{\lambda a + \lambda b},$$

que evaluándolo en 0, $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

De esta forma queda probada la propiedad distributiva y el siguiente teorema.

Teorema 7.10. *Sea $\mathbb{A}$ un plano afín satisfaciendo los Axiomas $A4$ y $A5$. Consideremos los siguientes elementos de $\mathbb{A}$: l una recta, 0, 1 dos puntos de l, R el conjunto de puntos de l. Si definimos la suma y multiplicación como hemos descrito anteriormente, entonces R es un anillo de división.*

7.3. Introduciendo coordenadas en $\mathbb{A}$

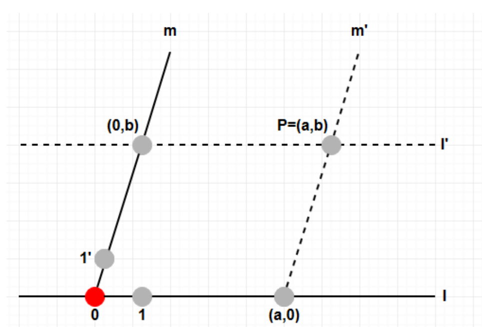
Con los conocimientos vistos hasta ahora, estamos en condiciones de introducir coordenadas en un plano afín $\mathbb{A}$ que cumpla $A4$ y $A5$.

En primer lugar fijamos una recta $l \in \mathbb{A}$ y dos puntos 0, 1, en l. Sobre la base de estas elecciones definimos nuestro anillo de división R. Elegimos ahora otra recta, m, que pase por 0 y fijamos en ella un punto, $1'$.

Para cada $P \in l$, si P corresponde al elemento $a \in R$, entonces P tendrá las coordenadas afines $(a, 0)$. Los elementos 0 y 1 tendrán las coordenadas $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente.

Si $P \in m$, con $P \neq 0$, entonces existe una única dilatación σ tal que deja fijo al 0 y tal que $\sigma(1') = P$. La dilatación σ es de la forma σ_a, donde $\sigma_a(1') = a \in R$. En este caso P tendría las coordenadas $(0, a)$.

Por último, si P no está ni en l ni en m, dibujaremos dos rectas, l' y m', que pasen por P y tal que $l' \parallel l$, $m' \parallel m$. Entonces $l' \cap m = (0, b)$ y $m' \cap l = (a, 0)$. En este caso, $P = (a, b)$.



Además, nos interesa conocer las ecuaciones de las dilataciones y traslaciones. Para ello, veamos primero alguna notación. Para cualquier $a \in R$, denotamos τ'_a a la traslación que envía el 0 al $(0, a)$. Así τ'_1 es la traslación que envía el 0 al $1'$, y para cualquier $a \in R$, con $a \neq 0$,

$$\tau'_a = \sigma_a \tau'_1 \sigma_a^{-1}.$$

Se puede probar que la aplicación $\phi : Tran_l(\mathbb{A}) \to Tran_m(\mathbb{A})$ definida por $\tau_a \mapsto \tau'_a$, es un homomorfismo. Luego para $a, b \in R$ cualesquiera, se tiene que

$$\tau'_{a+b} = \tau'_a \tau'_b$$
$$\tau'_{ab} = \sigma_b \tau'_a \sigma_b^{-1}.$$

Proposición 7.11. *Sea τ una traslación de $\mathbb{A}$, y supongamos que $\tau(0) = (a, b)$. Entonces τ envía un punto arbitrario $Q = (x, y)$ de $\mathbb{A}$ a $Q' = (x', y')$, donde*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Proposición 7.12. *Dada σ, una dilatación de $\mathbb{A}$ que deja fijo el punto 0. Entonces $\sigma = \sigma_a$ para algún $a \in R$, y σ envía $Q = (x, y)$ a $Q' = (x', y')$, donde*

$$\begin{cases} x' = xa \\ y' = ya \end{cases}$$

Teorema 7.13. *Sea $\mathbb{A}$ un plano afín satisfaciendo $A4$ y $A5$. Fijamos dos rectas no paralelas l y m, y los puntos $1 \in l$, $1' \in m$ diferentes del $0 = l \cap m$. Entonces asignando coordenadas de la forma explicada anteriormente, las rectas de $\mathbb{A}$ vendrán dadas por las ecuaciones lineales de la forma $y = mx + b$, $m, b \in R$, o $x = a$, con $a \in R$. Así, $\mathbb{A}$ es isomorfo al plano afín $A^2(R)$.*

Observemos que si σ es una dilatación arbitraria de $\mathbb{A}$, entonces σ puede ser escrita como $\tau\sigma'$, donde τ es una traslación, y σ' es una dilatación que deja fijo al 0. Si τ tiene las ecuaciones $x' = x + c$, $y' = y + d$, y σ' $x' = xa$, $y' = ya$, entonces σ tendrá las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = xa + c \\ y' = ya + d \end{cases}$$

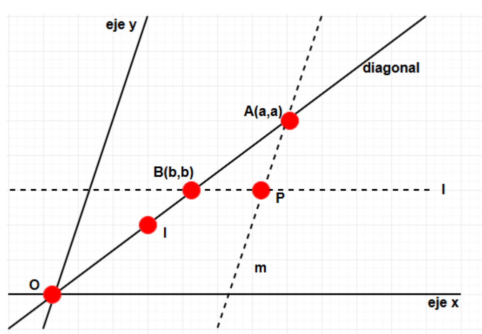
Teorema 7.14. *Sea π un plano proyectivo satisfaciendo los Axiomas $P1 - P5$. Entonces existe un anillo de división R tal que π es isomorfo al plano proyectivo sobre R, $P^2(R)$.*

8. Coordenadas para un plano alternado

En este apartado, veremos, que en planos proyectivos que resultan de completar un plano afín $\mathbb{A}$ que únicamente verifique el Axioma menor de Desargues ($A4$), también es posible introducir coordenadas. Son los planos que hemos llamado al final de la sección 7.1. planos alternativos. En este caso el anillo de coordenadas que aparece ya no es necesariamente asociativo. A estos anillos se les conoce como anillos ternarios de Veblen-Wedderburn. Un ejemplo de estos anillos son los octoniones de Cayley, de los que hablaremos al final de la sección.

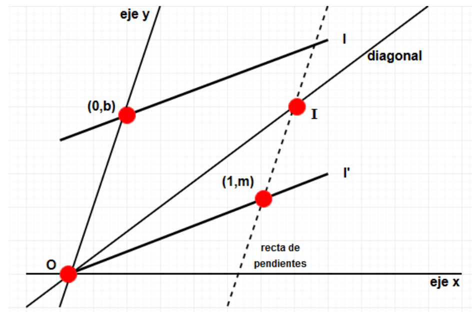
Sea $\mathbb{A}$ un plano afín. A continuación vamos a proceder a dotar a $\mathbb{A}$ de coordenadas. Para ellos seguiremos los siguientes pasos:

- 1º En primer lugar, seleccionamos un punto de $\mathbb{A}$ al que denotaremos por O. Diremos que O es el origen.
- 2º Sabemos por los Axiomas $A2$ y $A3$ que existen tres rectas distintas que pasan por O. Tomaremos una de ellas como el eje x , otra como el eje y, y la restante como la diagonal.
- 3º Sobre la recta elegida como la diagonal, seleccionaremos otro punto $I \neq O$. Diremos que I es el punto unitario.
- 4º Sea Γ un conjunto cuyos elementos están en correspondencia biyectiva con los puntos de la recta diagonal. Adoptamos el convenio de denotar a los puntos con letras mayúsculas. Si el punto está en OI, el correspondiente elemento de Γ lo denotaremos con la misma letra pero en minúscula. Las únicas excepciones son O e I que los denotaremos por 0 y 1 respectivamente.
- 5º Sea $A \in OI$. Asignaremos a A las coordenadas (a, a). De esta forma O tendrá las coordenadas $(0, 0)$ e I $(1, 1)$.
- 6º Sea $P \in \mathbb{A}$ tal que $P \notin OI$. Por el Axioma $A1$, existe una única recta, l, paralela al eje x que pase por P. Entonces l y OI se intersecarán en un punto B con coordenadas (b, b). De la misma forma, existirá una única recta, m, paralela al eje y que pase por P. Entonces m y OI se intersecarán en un punto A con coordenadas (a, a). Ahora a P, le daremos coordenadas (a, b).
  Con este proceso estamos asignando coordenadas a cada punto de $\mathbb{A}$, y estableciendo una biyección entre $\Gamma \times \Gamma$ y $\mathbb{A}$.



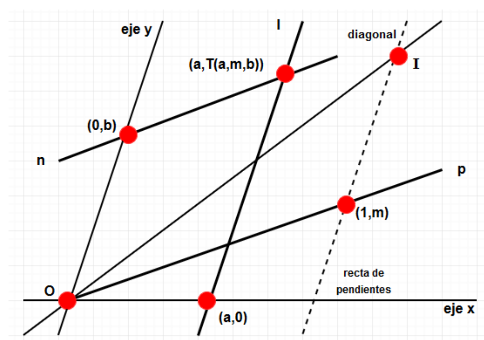
- 7º Ahora procederemos a asignar una pendiente y un punto de intersección con el eje y a cada recta l no paralela al eje y. Llamamos recta de pendientes a la única recta que pasa por I y que es paralela al eje y. Sea l' la recta paralela a l que pasa por O. Entonces l' se intersecará con la recta de pendientes en el punto $(1, m)$. Diremos que la pendiente de l en m. Además l se intersecará con el eje y en un punto $(0, b)$, por tanto diremos que b es el punto de intersección entre l y el eje y.

Notemos que m y b determinan de forma única a l.



- 8º Para cada 3-tupla, $(a, m, b) \in \Gamma\times\Gamma\times\Gamma$ asignaremos un único elemento, $T(a, m, b)$, de Γ. Esto definirá un anillo ternario (Γ, T), es decir, un conjunto Γ con la operación ternaria $T : \Gamma\times\Gamma\times\Gamma \longrightarrow \Gamma$ satisfaciendo las cinco propiedades, $T1-T5$, que veremos a continuación.

  Veamos como definir $T(a, m, b)$. Sea n la recta de pendiente m y con punto de intersección con el eje y, b, y sea l la recta paralela al eje y que pasa por el punto $(a, 0)$. Como n tiene pendiente m, y no es paralela al eje y, n y l se intersecarán en un punto con coordenadas de la forma (a, y). Entonces, asignaremos $T(a, b, m) = y$.



  Notemos que un punto $P(x, y) \in n$ si y solo si se satisface la ecuación $y = T(x, m, b)$. Por tanto la ecuación $y = T(x, m, b)$ es la ecuación de una recta de pendiente m y con punto de intersección con el eje y, b.

  Observemos que una recta paralela al eje y tendrá una ecuación de la forma $x = a$.

Definición 8.1. *Un anillo ternario* (Γ, T) *es un conjunto* $\Gamma = \{0, 1, a, b, c, \cdots\}$ *junto a una aplicación* $T : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ *tal que satiface:*

- $T1$*. Para todo* $a, b, c \in \Gamma$,

$$T(0, b, c) = T(a, 0, c) = c.$$

- $T2$*. Para todo* $a \in \Gamma$,

$$T(a,1,0) = T(1,a,0) = a.$$

- *$T3$. Si $m, m', b, b' \in \Gamma$ y $m \neq m'$, entonces la ecuación*

$$T(x,m,b) = T(x,m',b')$$

  tiene solución única.

- *$T4$. Si $a, a', b, b' \in \Gamma$ y $a \neq a'$, entonces el sistema de ecuaciones*

$$T(a,x,y) = b$$
$$T(a',x,y) = b'$$

  tiene solución única.

- *$T5$. Para todo $a, m, c \in \Gamma$, la ecuación*

$$T(a,m,x) = c$$

  tiene una única solución.

Ejemplo 8.2. *El conjunto (Γ, T) descrito al principio del apartado, es un anillo ternario. $T1$ y $T2$ son casos especiales de rectas n y m. $T3$ es equivalente a la proposición de que las rectas o son paralelas, o se intersecan en un único punto. $T4$ es equivalente al Axioma A1: hay una única recta de pendiente x y punto de intersección con el eje y, y, que pasa por los dos puntos distintos (a,b) y (a',b'). $T5$ es equivalente al Axioma A2: hay una única recta paralela a OM, donde $M = M(1,m)$, que pasa por (a,c).*

Podemos hablar de equivalencia, ya que el anillo ternario (Γ, T) define en $\Gamma \times \Gamma$ un plano afín, donde sus rectas vienen dadas por $\{(x,y)|x = a\}$ y $\{(x,y)|y = T(x,m,b)\}$, para todo $m, b \in \Gamma$.

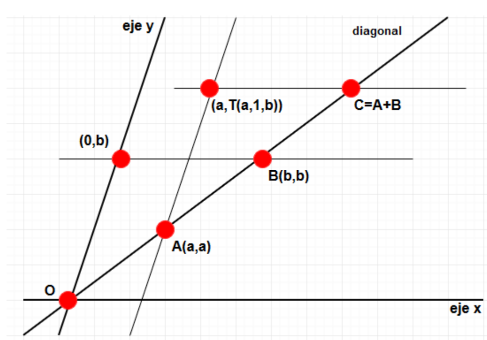
Ejemplo 8.3. *El anillo de división $(R, +, \cdot, 0, 1)$ es un anillo ternario, donde*

$$T(a,m,b) = am + b.$$

8.1. Suma

Supongamos que (Γ, T) es un anillo ternario. Definimos la operación binaria suma:

$$(+) : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$
$$(a,b) \mapsto a + b = T(a,1,b)$$



Definición 8.4. *Un lazo es un conjunto Λ con un elemento destacado, 0, y una operación binaria, $\odot$, tal que satisface las siguiente propiedades:*

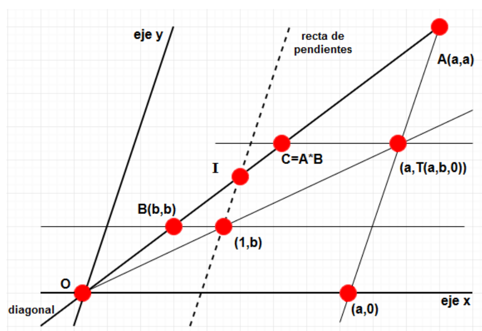
- *L1.* $a \odot 0 = a = 0 \odot a$, *para todo* $a \in \Lambda$
- *L2. En* $a \odot b = c$ *con* $a, b, c \in \Lambda$, *al fijar dos de ellos, el tercero está unívocamente determinado.*

Ejemplo 8.5. $(\Gamma, +, 0)$ *es un lazo.*
Notemos que a pesar de que $(\Gamma, +, 0)$ *es un lazo, en general, no es cierto que sea un grupo, ni que la operación suma sea una operación conmutativa. Sin embargo, sí que es un hecho, que en presencia del Axioma menor de Desargues,* $(\Gamma, +, 0)$ *es un grupo abeliano.*

8.2. Multiplicación

Supongamos que (Γ, T) es un anillo ternario. Definimos en Γ la operación binaria multiplicación:

$$(\cdot) : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b = T(a, b, 0)$$



Se puede probar que $(\Gamma - \{0\}, \cdot, 1)$ es un lazo y que $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$.

Con las dos operaciones $+, \cdot$ definidas en Γ, tenemos que en $\mathbb{A}$ las siguientes ecuaciones nos determinan (x, y) de puntos de $\mathbb{A}$ que son rectas de $\mathbb{A}$: $y = x + b$, $y = x \cdot m$, $y = b$, $x = a$.

Sin embargo, no se cumple que $T(x, m, b) = x \cdot m + b$. Esto es equivalente a que $T(x \cdot m, 1, b) = T(x, m, b)$. Si esto se cumple para cada terna (x, m, b), se dice que T es lineal. Una consecuencia de que $\mathbb{A}$ verifique el Axioma menor de Desargues es que T es lineal.

Definición 8.6. *Decimos que un anillo ternario en un sistema de Veblen-Wedderburn si y solo si*

- ***VW1.*** $(\Gamma, +, 0)$ *es un grupo abeliano.*
- ***VW2.*** $(\Gamma - \{0\}, \cdot, 1)$ *es un lazo.*
- ***VW3.*** $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ *para todo* $a \in \Gamma$.
- ***VW4.*** *Se cumple la propiedad distributiva a derecha:* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *para todo* $a, b, c \in \Gamma$.

Teorema 8.7. *Un plano afín, $\mathbb{A}$, satisface el Axioma menor de Desargues si y solo si $\mathbb{A} \cong \Gamma \times \Gamma$, donde (Γ, T) es un sistema de Veblen-Wedderburn, y donde las rectas son de la forma $x = a$ o $y = T(x, m, b)$.*

Ejemplo 8.8. *Los octoniones, de los cuales vamos a comentar en la siguiente subsección algunas curiosidades , son un ejemplo de sistema de Veblen-Wedderburn.*

8.3. Octoniones

Consideremos el espacio vectorial real 8-dimensional con base $e_1, \cdots, e_8$, donde $e_1 = 1$. Definamos el álgebra no asociativa de los octoniones, $\mathbb{O}$, sobre este espacio vectorial. Para ello introduciremos la multiplicación entre los elementos básicos:

- $1 \cdot e_i = e_i = e_i \cdot 1$, para todo $i = 1, \cdots, 8$.

- $e_i^2 = -1$, para $i \geq 2$.

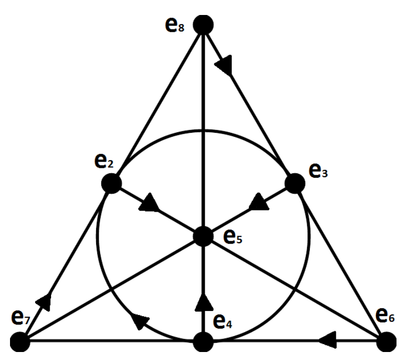
- $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$, para $1 < i < j \leq 8$.

- Además:

$$\begin{aligned}
e_2 \cdot e_3 &= e_4 \ , \\
e_2 \cdot e_5 &= e_6 \ , \\
e_3 \cdot e_5 &= e_7 \ , \\
e_4 \cdot e_5 &= e_8 \ , \\
e_6 \cdot e_4 &= e_7 \ , \\
e_7 \cdot e_2 &= e_8 \ , \\
e_8 \cdot e_3 &= e_6 \ ,
\end{aligned}$$

y otras 14 relaciones que se obtienen con permutaciones cíclicas, es decir, si $e_i \cdot e_j = e_k$, entonces tenemos que $e_j \cdot e_k = e_i$ y $e_k \cdot e_i = e_j$. La multiplicación entre octoniones se obtiene usando ambas leyes distributivas y permitiendo que los números reales conmuten.

Veamos a continuación un diagrama que representa la multiplicación octoniónica:



Se puede probar que los octoniones son un ejemplo de sistema de Veblen-Wedderburn.

Comentaremos a continuación brevemente cómo aparecieron históricamente los octoniones y de los cuaternios. Estos últimos ya nos surgieron en la sección 6, Ejemplo 6.5.
.

William Hamilton nació el 4 de agosto de 1805 en Dublín. Hamilton había descubierto en 1835, a la edad de 30 años, cómo tratar los números complejos como pares de números reales y, fascinado por la relación entre los números complejos y la geometría en dimensión 2, intentó durante muchos años extender los números complejos a un nuevo sistema de números de dimensión 3, que pudieran jugar un papel geométrico en el espacio, análogo al que desempeñan los números complejos en el plano. Hamilton buscaba un álgebra normada de dimensión 3, la cuál no pudo encontrar, y que hoy en día sabemos que no existe. Pero sí que definió un nuevo conjunto de números, los cuaternios, que se expresan de la forma $a+bi+cj+dk$, y forman un álgebra de dimensión 4 sobre los reales. Hamilton pensó que su descubrimiento revolucionaría la Física y las Matemáticas, y pasó el resto de su vida obsesionado con los cuaternios y sus aplicaciones.

El 26 de diciembre del mismo año en el que Hamilton definió los cuaternios (1843), Jonh Graves describió en una carta dirigida a Hamilton, un álgebra real de dimensión 8, que extendía al álgebra de los cuaternios, y que llamó las octavas. Tenían propiedades parecidas a los cuaternios, en particular, la propiedad fundamental de que la longitud de un producto es el producto de longitudes. En enero de 1844, Graves envió otras tres cartas a Hamilton desarrollando su idea y planteando la posibilidad de continuar con un álgebra de dimensión 16, pero no consiguió que se mantuviera la propiedad relativa al producto de longitudes.

Mientras tanto, un joven Arthur Cayley había estado pensando sobre los cuaternios desde que Hamilton anunció su existencia. Y en marzo de 1845 publicó un trabajo en el que describía los octoniones, de manera independiente de Graves, cuyos resultados no habían sido publicados todavía. Por lo que a los octoniones se les conoce también como los números de Cayley.

Para finalizar vamos a comentar la gran importancia que los octoniones tienen en la Física (al igual que los cuaternios la tienen en la Física y en la Robótica).

En la década de los años 70, los físicos teóricos descubrieron una sorprendente teoría que llamaron Supersimetría. Esta teoría afirma que en los niveles básicos de la materia y de las fuerzas naturales, el universo posee simetría. Toda partícula de materia tiene otra asociada cargada de fuerza. Y toda partícula de fuerza tiene una partícula de fuerza gemela.

La Supersimetría es una teoría que generaliza o comprende a la Mecánica Cuántica. Y acorde con la Mecánica Cuántica. las partículas tienen asociadas ondas.

En la versión estándar 3-dimensional de la Mecánica Cuántica, con números espin y vectores describimos el movimiento de ondas de las partículas de materia.

Imaginemos un universo sin tiempo, (solo espacio) con dimensiones 1, 2, 4 ó 8. La materia y la fuerza de las partículas serían ondas descritas por vectores en un álgebra de división, el único tipo de estructura que nos permite sumar, restar, multiplicar y dividir. En esta situación los vectores coinciden con números reales, complejos, números cuaternios u octoniones, respectivamente (según sea 1, 2, 4 ó 8 la dimensión).

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos establecido un método de cómo y de qué forma dotar de coordenadas a un plano proyectivo, analizando diversas características y condiciones.

Hemos tratado este tema desde un punto de vistas axiomático. De esta forma, nos han surgido demostraciones muy bellas en la cuales hemos necesitado de nociones y resultados algebraicos. La Geometría clásica Proyectiva y el Algebra Moderna de estructuras se han mezclado para construir esta teoría.

Hemos acabado viendo sistemas muy abstractos como los anillos ternarios de Veblen-Wedderburn, pero sin embargo tienen como ejemplos anillos de gran importancia como los octoniones. Con palabras atribuidas al famoso matemático francés Dirac: "*muy probablemente cualquier teoría matemática bella tendrá la suerte de ser aplicada y reconocida*".

En general, las matemáticas fueron, son y serán creadas y desarrolladas para resolver, predecir y justificar hechos y problemas de la realidad que nosotros percibimos.

La ciencia es un todo, y trata de resolver estos problemas, de los cuales ha surgido. Pero a veces se desarrolla también de un modo autónomo, y sin embargo, lo que produce tiene también aplicaciones inesperadas.

Referencias

[1] Lars Kadison and Matthias T.Kromann, Projective Geometry and Modern Algebra, Birkhäuser (1996).

[2] John C. Baez and Jonh Huerta, The Strangest Numbers in String Theory, Scientific American, May 1, (2011), 61-65.

[3] Alberto Elduque, Otros números, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, (2004).

[4] John C. Baez, The Octonions, Bulletin of the American Mathematical Society, 39 (2), (2001), 145-205.